ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 25/27 **April 1947** **Heft 1**

Zum Wiedererscheinen der „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik".

Nach zweijähriger Unterbrechung erscheint mit vorliegendem Heft 1 des Bandes 25/27 die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" wieder in der alten bewährten Anordnung und Form. Das letzte Heft vor dem Zusammenbruch war das Doppelheft 5/6 des Bandes 24, das Ludwig Prandtl zum 70. Geburtstag gewidmet war. Heft 3 und 4 dieses Bandes waren zwar vorbereitet, konnten aber nicht mehr gedruckt werden. Dieser Band bleibt also unvollständig.

Künftig wird die Zeitschrift monatlich in Heften von 32 Seiten Umfang erscheinen.

In den neuen Bänden will die Zeitschrift nicht nur, wie es in den letzten Jahrgängen der Fall war, Aufsätze in der Hauptsache aus den Gebieten der praktischen Analysis und der Mechanik fester und deformierbarer Körper bringen, sondern es sollen auch Arbeiten aus anderen Gebieten, z. B. der Elektrotechnik, der Thermodynamik, der Optik, der Geodäsie, der Statistik usw. aufgenommen werden, falls sie mathematisch interessante Gedankengänge enthalten. Die Zeitschrift soll wieder so umfassend werden, wie es die ersten Jahrgänge waren. In den letzten Jahren lag das Schwergewicht auf der Mechanik. In Zukunft sollen die Anwendungen der Mathematik im Vordergrund stehen.

Der neue Verlag hat die Lizenz für die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" am 27. 2. 1947 erhalten. Seine umfangreiche wissenschaftliche Verlagsproduktion, vor allem auch auf verwandten Gebieten, gibt der „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" das sichere Fundament für eine stete Aufwärtsentwicklung.

Wir bitten nun alle Fachgenossen des In- und Auslandes um ihre Mitarbeit, damit der Zeitschrift im Interesse der internationalen Wissenschaft ihre alte geachtete Stellung erhalten bleibt.

Der Verlag. *Der Herausgeber.*

HAUPTAUFSÄTZE

Über die Anfangswertaufgabe in der Theorie der Rayleighwellen.

Von *Erwin Hardtwig* in Stuttgart.

Die Bewegungen, die von den Massenpunkten eines, den Halbraum erfüllenden elastischen (oder fast-elastischen) Mediums ausgeführt werden, hängen davon ab, aus welchen Anfangsbedingungen heraus sie erfolgen. Die Bestimmung dieser Bewegungen wird für den Fall durchgeführt, daß Anfangsverschiebung und Anfangsgeschwindigkeit der Oberflächenpunkte vorgegeben sind. Der zwei- und dreidimensionale Fall werden getrennt behandelt.

Les mouvements descrits par les points de masse d'un milieu élastique (ou presqu' élastique) remplissant le demi-espace dependent des conditions initiales d'après lesquelles ils se produisent. La détermination de ces mouvements est réalisée pour le cas, ou déplacement initial et vitesse initiale des points superficiels sont indiqués. Le cas de deux et trois dimensions sont traités séparement.

The movements performed by the points of mass of an elastic (or nearly elastic) medium filling the half-room depend on the initial conditions from which they arise. The determination of these movements is performed for the case that initial displacement and initial velocity of the points of superficiès are indicated. The two dimensional and three dimensional cases are treated separately.

Движения, выполняемые массовыми пунктами наполняющего об, ем цилиндра эластичного (или почти что эластичного) медиума, зависят от того, из каких первоначальных условий они исходят. Определение этих движений проводится на тот случай, что указаны начальное передвижение и начальная скорость пунктов поверхности. Случаи двойного и тройного измерения должны рассматриваться в отдельности.

Von den drei Wellenarten, die in einem elastischen Körper bei entsprechender Anregung entstehen können, den longitudinalen Raumwellen, den transversalen Raumwellen und den Oberflächenwellen (Rayleighwellen) bieten zweifellos die letzteren die interessantesten Fragestellungen sowohl praktischer wie theoretischer Art. Abgesehen davon, daß sie nicht in jedem

beliebig geformten Körper auftreten können, legen sie auch der Wahl der Anfangsbedingungen, aus denen heraus das System in freie Schwingungen übergeht, gewisse Einschränkungen auf.

Die folgenden Zeilen befassen sich mit einer dahinzielenden Fragestellung. Um sie zu formulieren, bedienen wir uns, wie üblich, eines rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystems x, y, z, das wir so legen, daß der unter der x-y-Ebene liegende Halbraum vom Medium erfüllt ist. Die positive z-Achse weise nach unten, also gegen das Medium hin, von dem wir annehmen, daß es die sich nur wenig zeitlich und räumlich ändernde Dichte ϱ besitze. Die drei längs den Koordinatenachsen genommenen Komponenten des Verschiebungsvektors $\mathfrak{s}$ seien u, v, w. Für den Spannungstensor mit den Komponenten $p_{xx}, p_{xy}, \ldots$ machen wir, um möglichst die Allgemeinheit zu wahren, einen Ansatz, der sowohl den elastischen als auch den viskosen Eigenschaften des Mediums gerecht werden soll und der in der Literatur wiederholt dort angewendet wurde, wo es sich darum handelte, das physikalische Verhalten von nicht vollkommen elastischen Körpern zu beschreiben[1]). Wir verstehen unter λ, μ die Laméschen Konstanten und unter λ', μ' zwei weitere konstante Zahlen, die die viskosen Eigenschaften des Mediums charakterisieren sollen. Der Ansatz soll dann so lauten:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda'\Theta + 2\mu'\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad p_{yy} = \ldots, \quad p_{zz} = \ldots, \\ p_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mu'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad p_{xz} = \ldots, \quad p_{yz} = \ldots, \quad \Theta = \operatorname{div}\mathfrak{s} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (1),$$

Der so angenommene Spannungstensor steht mit den zeitlichen Veränderungen des Verschiebungsvektors in Beziehungen, die, vektoriell geschrieben, sich durch die Differentialgleichung

$$\varrho\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial t^2} = \mu\Delta\mathfrak{s} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{s} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\mu'\Delta\mathfrak{s} + (\lambda'+\mu')\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{s}\right] \quad . \; . \; . \; . \; (I)$$

für $\mathfrak{s}$ ausdrücken lassen. Dazu kommt noch, als Oberflächenbedingung, die Forderung, daß die zur Oberfläche $z=0$ des Mediums normalen Spannungskomponenten für $z=0$ gleich Null werden:

$$(p_{xz})_{z=0} = 0, \quad (p_{yz})_{z=0} = 0, \quad (p_{zz})_{z=0} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Aus (I) ist ersichtlich, daß man die Gleichungen der Elatizitätstheorie erhält, wenn man $\lambda' = \mu' = 0$ setzt und jene der Hydromechanik, wenn $\lambda = \mu = 0$ gemacht wird. Zu den allgemeinen Gl. (I) und (2) treten nun die Bedingungen hinzu, die die Lösungen als Rayleighwellen charakterisieren sollen: die Teilchenverrückungen nach den drei Achsen u, v, w sollen gegen das Innere des Mediums hin, also mit wachsendem z, nach e-Potenzen abnehmen. Partikulare Lösungen dieser Art gibt es tatsächlich unter bestimmten Einschränkungen für λ', μ'. Wir bezeichnen sie auch hier, wie im rein elastischen Fall als freie Rayleighwellen [2].

Unsere Fragestellung soll nun so lauten: Lassen sich die einzelnen Partikularlösungen derart superponieren, daß gewisse Anfangsbedingungen (und zwar solche, welche die Anfangslage, und solche, welche die Anfangsgeschwindigkeit der einzelnen Massenpunkte festlegen) erfüllt werden? Mit anderen Worten: Wenn zu Anfang der Zeitrechnung ($t=0$) in jedem Raumpunkt x, y, z die Teilchenverschiebungen u, v, w sowohl wie die Geschwindigkeitskomponenten bekannt sind, kann es dazu Rayleighwellen geben, die diese Anfangsbedingungen erfüllen? Wenn dies nicht der Fall ist: wie viele und welche Anfangsbedingungen kann man vorschreiben, um gerade jenen Grad von Willkür auszuschöpfen, der in den Konstanten der Partikularlösungen enthalten ist?

Es ist ersichtlich, daß die ganze Frage von ähnlicher Art ist wie jene, die in der Theorie der schwingenden Saite behandelt wird. Die hier zu lösende Anfangswertaufgabe ist aber insofern schwieriger, als man es nicht mit einer, sondern mit drei Komponenten der Verschiebung zu tun hat, die nicht unabhängig voneinander sind.

Bei der Lösung der Aufgabe geht man so vor, daß man, ausgehend von passend gewählten Partikularlösungen, diese durch Superposition zu allgemeinen Lösungen zusammenfügt und sie dann den Anfangsbedingungen anpaßt. Dabei zeigt es sich, daß der dreidimensionale Fall ein wenig anders zu behandeln ist als der zweidimensionale.

---

[1]) Über die verschiedenen Möglichkeiten für die Wahl des Spannungstensors und ihre Berechtigung vgl. die Arbeit [1] des Verfassers. Dort finden sich auch Hinweise auf die Literatur. Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Das zweidimensionale Problem.

1. Die Partikularlösungen. Die zu integrierende Differentialgleichung ist wieder (I), doch bedeutet $\mathfrak{s}$ jetzt den zweidimensionalen Verschiebungsvektor mit den Komponenten u, w, bezüglich der x- und z-Achse. Der Spannungstensor hat nunmehr bloß die drei Komponenten

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= \lambda\,\Theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda'\,\Theta + 2\mu'\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad p_{zz} = \ldots \\ p_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \mu'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (3),$$

so daß (I) zu integrieren ist unter der Annahme, daß

$$(p_{xz})_{z=0} = 0, \qquad (p_{zz})_{z=0} = 0 \quad \ldots \ldots (4).$$

Aus den zahlreichen möglichen Lösungen von (I) greifen wir die Oberflächenplanwellen (Rayleighwellen) dadurch heraus, daß wir in dem sonst üblichen Ansatz

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \ldots \ldots (5)$$

die neu eingeführten Funktionen Φ und Ψ mit z nach e-Potenzen abklingen lassen:

$$\Phi = A e^{-q_1 z + i(a_1 x + p_1 t)}, \qquad \Psi = B e^{-q_2 z + i(a_2 x + p_2 t)} \quad \ldots \ldots (6).$$

Dementsprechend sind die Konstanten q_1 und q_2 reell und positiv vorauszusetzen. Was die anderen als willkürlich eingeführten Konstanten A, B, a_1, a_2, p_1, p_2 anlangt, so zeigt man leicht mit Hilfe der Oberflächenbedingungen (4), daß $a_1 = a_2 = a$ und $p_1 = p_2 = p$ ausfallen muß, wo nun a eine reelle und p eine im allgemeinen komplexe Zahl bedeuten, die wir gleich in der Form

$$p = \overline{p} + i\varepsilon \quad (\overline{p}, \varepsilon \text{ reell}) \quad \ldots \ldots (7)$$

voraussetzen. Ferner ergibt das Eintragen des Ansatzes (5), (6) in (I), daß λ, μ, λ', μ' nicht voneinander unabhängig sein können, sondern daß zwischen ihnen die Bindung besteht

$$\lambda' = \sigma\lambda, \qquad \mu' = \sigma\mu \quad (\sigma = \text{willkürliche Konstante}) \quad \ldots \ldots (8).$$

In dem betrachteten Medium sind daher Rayleighwellen nur möglich, wenn der Deformationsvorgang überlagert wird von einem Fließvorgang, der durch die Größe σ charakterisiert wird. Die Konstanten λ', μ' charakterisieren demnach das Medium als ein „fastelastisches", d. h. ein solches, in dem elastische Deformation und dazu proportionaler Fließvorgang nebeneinander gehen. Was aber A, B anlangt, so bestimmen sich diese beiden Größen bis auf einen willkürlichen Faktor genau mit Hilfe der beiden Oberflächenbedingungen (4), die mit einem linear-homogenen Gleichungssystem für A und B gleichbedeutend sind. Da dessen Determinante verschwinden muß, erhält man eine zusätzliche Gleichung, die (unter der für die Erde weitgehend richtig gefundenen Annahme $\lambda = \mu$) auf die bekannte Gleichung dritten Grades

$$3\varkappa^3 - 12\varkappa^2 + 14\varkappa - 4 = 0 \quad \ldots \ldots (9)$$

für jene Größe $\varkappa$ hinausläuft, die in den Ausdrücken

$$\varepsilon = \varkappa\frac{\mu\sigma}{\varrho}a^2, \qquad V = \frac{\overline{p}}{a} = \pm\sqrt{2\varkappa}\sqrt{\frac{\mu}{\varrho} - \frac{\sigma^2\mu^2}{2\varrho^2}\varkappa a^2} \quad \ldots \ldots (10)$$

für die Dämpfung ε und die Wellengeschwindigkeit V eine Rolle spielt. Von den drei (reellen) Wurzeln dieser Gleichung ist nur die kleinste, $\varkappa = 1 - 1/\sqrt{3} = 0{,}4226\ldots$ brauchbar, denn nur sie macht die Exponenten

$$q_1 = +a\sqrt{1 - \frac{2}{3}\varkappa}, \qquad q_2 = +a\sqrt{1 - 2\varkappa} \quad \ldots \ldots (11)$$

reell. Unter Einführung der Abkürzungen

$$e^{-q_1 z} - (1-\varkappa)\,e^{-q_2 z} = \Gamma_1(a, z), \qquad -(1-\varkappa)\,e^{-q_1 z} + e^{-q_2 z} = \Gamma_2(a, z) \quad \ldots (12)$$

und einer willkürlichen Konstanten C kann man die beiden sich ergebenden Partikularlösungen unseres Problems in folgender Form anschreiben:

$$\begin{aligned} u &= -C\Gamma_1(a,z)\,e^{-\varepsilon t}\sin a(x\pm Vt),\\ w &= C\frac{1-\varkappa}{\sqrt{1-2\varkappa}}\Gamma_2(a,z)e^{-\varepsilon t}\cos a(x\pm Vt),\\ &\text{oder}\\ u &= +C\Gamma_1(a,z)\,e^{-\varepsilon t}\cos a(x\pm Vt),\\ w &= C\frac{1-\varkappa}{\sqrt{1-2\varkappa}}\Gamma_2(a,z)\,e^{-\varepsilon t}\sin a(x\pm Vt) \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots (13).$$

Die gesuchten, freien Rayleighwellen erweisen sich mithin als gedämpfte Schwingungen, wie es bei der Beschaffenheit des Mediums als eines nicht vollkommen elastischen von vornherein zu erwarten war. Die physikalische Bedeutung der außer C noch auftretenden willkürlichen Konstanten a ist durch die Beziehung

$$a=\frac{2\pi}{L}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

festgelegt, wo L die Wellenlänge bedeutet. Was die Spannungen betrifft, so gehört zur oberen Partikularlösung der Spannungstensor

$$\begin{aligned} p_{xx} &= 2a\mu C\left[-\left(1-\frac{\varkappa}{3}\right)e^{-q_1 z}+(1-\varkappa)\,e^{-q_2 z}\right]e^{-\varepsilon t}\cos a(x\pm Vt),\\ p_{xz} &= 2a\mu C\sqrt{1-\frac{2}{\partial}\varkappa}\,(e^{-q_1 z}-e^{-q_2 z})\,e^{-\varepsilon t}\sin a(x\pm Vt),\\ p_{zz} &= 2a\mu C(1-\varkappa)\,(e^{-q_1 z}-e^{-q_2 z})\,e^{-\varepsilon t}\cos a(x\pm Vt) \end{aligned}\quad \ldots (15)$$

zur unteren hingegen der Tensor

$$\begin{aligned} p_{xx} &= 2a\mu C\left[-\left(1-\frac{\varkappa}{3}\right)e^{-q_1 z}+(1-\varkappa)\,e^{-q_2 z}\right]e^{-\varepsilon t}\sin a(x\pm Vt),\\ p_{xz} &= 2a\mu C\sqrt{1-\frac{2}{\partial}\varkappa}\,(e^{-q_1 z}-e^{-q_2 z})\,e^{-\varepsilon t}\cos a(x\pm Vt),\\ p_{zz} &= 2a\mu C(1-\varkappa)\,(e^{-q_1 z}-e^{-q_2 z})\,e^{-\varepsilon t}\sin a(x\pm Vt) \end{aligned}\quad \ldots (16)$$

Daraus ist unmittelbar zu ersehen, daß an der Oberfläche $z=0$ die Komponenten p_{xz}, p_{zz} verschwinden.

2. Die Anfangswertaufgabe. Wegen der Linearität der Differentialgleichungen läßt sich die allgemeine Lösung $U(x,z,t)$, $W(x,z,t)$ aus den partikulären durch Superposition herstellen:

$$\left.\begin{aligned} U(x,z,t) &= -\int_0^\infty \Gamma_1(a,z)\,e^{-a^2\alpha^2 t}\\ &\quad [C_1\sin a(x+Vt)+C_2\cos a(x+Vt)+C_3\sin a(x-Vt)+C_4\cos a(x-Vt)]\,da,\\ W(x,z,t) &= K\int_0^\infty \Gamma_2(a,z)\,e^{-a^2\alpha^2 t}\\ &\quad [C_1\cos a(x+Vt)-C_2\sin a(x+Vt)+C_3\cos a(x-Vt)-C_4\sin a(x-Vt)]\,da \end{aligned}\right\} (17).$$

Hier wurde zur Abkürzung

$$\frac{1-\varkappa}{\sqrt{1-2\varkappa}}=K,\quad \frac{\sigma\mu}{\varrho}\varkappa=\alpha^2.\quad\ldots\ldots\ldots (18)$$

gesetzt. Die Konstanten C_1, C_2, ... sind nunmehr als Funktionen von a anzusehen. Die Integrationsvariable a steckt ferner vermöge (10) und (18) in α und V, in V steht sie unter dem Wurzelzeichen. Wegen des Zusammenhanges (14) zwischen a und L bedeutet dies eine Dispersion, deren Größe (außer von μ und ϱ) von der Konstanten σ abhängt. Da diese aber sehr klein aus-

fällt [1], so klein, daß für die in der Seismik auftretenden Wellenlängen eine Dispersion unter der Meßgrenze liegt, kann man für die Geschwindigkeit in erster Annäherung

$$V = \sqrt{2\varkappa}\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \quad \ldots \ldots (19)$$

setzen. Mathematisch bedeutet es eine wesentliche Erleichterung, die Integrationsvariable nicht unter dem Wurzelzeichen zu wissen. Eine weitere Vereinfachung erzielt man, wenn man fordert, daß sich alle Daten, die gegebenen sowohl wie die gefragten, auf die Oberfläche $z=0$ beziehen sollen. Die in (12) definierten Ausdrücke $\Gamma_1(\alpha,z)$, $\Gamma_2(\alpha,z)$ enthalten nämlich wegen (11) das α im Exponenten. Beschränkt man sich jedoch auf die Oberfläche, so reduziert sich jeder der beiden Ausdrücke auf die Konstante $\varkappa$, die man sich sofort mit den willkürlichen Funktionen $C_\nu(\alpha)$ vereinigt denken kann. Unter diesen vereinfachenden Annahmen kann man die allgemeine Lösung unseres Problems in der Form ansetzen

$$\left.\begin{aligned} U(x,t) &= \int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\{\cos\alpha x\,[(C_3-C_1)\sin\alpha V t-(C_4+C_2)\cos\alpha V t] \\ &\quad -\sin\alpha x\,[(C_4-C_2)\sin\alpha V t+(C_3+C_1)\cos\alpha V t]\}\,d\alpha, \\ W(x,t) &= K\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\{\cos\alpha x\,[(C_4-C_2)\sin\alpha V t+(C_3+C_1)\cos\alpha V t] \\ &\quad +\sin\alpha x\,[(C_3-C_1)\sin\alpha V t-(C_4+C_2)\cos\alpha V t]\}\,d\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots (20).$$

Die willkürlichen Funktionen $C_1, C_2, \ldots$ bzw. deren Linearkombinationen $C_4 \pm C_2$, $C_3 \pm C_1$ sind nun den Anfangsbedingungen anzupassen.

Als Anfangswertaufgabe bietet sich zwanglos die folgende dar:

1. Im Zeitpunkt $t=0$ soll für die Vertikalverschiebung an der Oberfläche ein „Profil" $f(x)$ vorgeschrieben sein

$$t=0, \quad W(x,0)=f(x) \quad \ldots \ldots (21).$$

2. Die Verschiebungen sollen aus einer bestimmten Verteilung der vertikalen Anfangsgeschwindigkeiten $g(x)$ hervorgehen

$$t=0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x). \quad \ldots \ldots (22),$$

d. h. es ist für den Anfang der Bewegung auch ein bestimmtes „Geschwindigkeitsprofil" für die Vertikalkomponente vorgeschrieben.

Es zeigt sich, daß durch diese beiden Anfangsbedingungen die willkürlichen Funktionen $C_\nu(\alpha)$ vollkommen festgelegt sind, insbesondere ist durch sie auch die Horizontalverschiebung $U(x,t)$ zu jedem Zeitpunkt mitbestimmt. Die angeführte Anfangswertaufgabe ist übrigens nicht die einzig mögliche. Man könnte ebensogut die Horizontalkomponente statt der Vertikalkomponenten auszeichnen oder sich irgendeine andere, passende Zusammenstellung zurechtlegen.

Aus (20) folgt für $t=0$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty [K(C_3+C_1)\cos\alpha x - K(C_4+C_2)\sin\alpha x]\,d\alpha, \\ g(x) &= \int_0^\infty [K(C_4-C_2)\,\alpha V\cdot\cos\alpha x + K(C_3-C_1)\,\alpha V\cdot\sin\alpha x]\,d\alpha \\ & -\infty < x < +\infty \end{aligned}\right\} \quad \ldots (23).$$

Um die Funktionen $C_\nu(\alpha)$ so zu bestimmen, daß sie diesen Bedingungen genügen, greifen wir auf den Fourierschen Integralsatz in der Form

$$F(x) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda\cdot\cos\alpha x + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\sin\alpha\lambda\,d\lambda\cdot\sin\alpha x\right]d\alpha \quad \ldots (24)$$

zurück [2]). Identifiziert man hier $F(x)$ das eine Mal mit $f(x)$ aus (23), das andere Mal mit $g(x)$,

[2]) Die Voraussetzungen, die über die Funktion $F(x)$ gemacht werden müssen, um die Existenz des Fourierschen Integralsatzes zu sichern, sind für die in der Geophysik auftretenden Funktionen in der Regel erfüllt. Um Sprungstellen der Form

$$\frac{1}{2}[F(x+0)+F(x-0)]$$

zu vermeiden, verlangen wir zusätzlich die Stetigkeit der Funktion $F(x)$ im Intervall $0 < x < \infty$.

so erkennt man, daß

$$\left.\begin{aligned} C_3+C_1&=\frac{1}{\pi K}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda, & C_4+C_2&=\frac{1}{\pi K}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\sin\alpha\lambda\,d\lambda,\\ C_3-C_1&=\frac{1}{\pi\alpha K V}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\sin\alpha\lambda\,d\lambda, & C_4-C_2&=\frac{1}{\pi\alpha K V}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots (25)$$

zu setzen ist. Dadurch sind die Funktionen $C_\nu(\alpha)$ so festgelegt, daß sie, in (20) eingesetzt, die allgemeine Lösung den Anfangsbedingungen anpassen. Man erhält als allgemeine Lösung

$$\left.\begin{aligned} U(x,t)&=\frac{1}{2\pi K}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,d\lambda\left\{\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha(\lambda-\overline{x-Vt})\,d\alpha+\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha(\lambda-\overline{x+Vt})\,d\alpha\right\}\\ &\quad+\frac{1}{\pi K V}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\,d\lambda\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha(\lambda-x)\sin\alpha V t\,d\alpha,\\ W(x,t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,d\lambda\left\{\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(\lambda-\overline{x-Vt})\,d\alpha+\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(\lambda-\overline{x+Vt})\,d\alpha\right\}\\ &\quad+\frac{1}{\pi V}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\,d\lambda\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(\lambda-x)\sin\alpha V t\,d\alpha \end{aligned}\right\} \quad (26).$$

Die hier auftretenden Integrale sind nur zum Teil elementar auswertbar. Man findet, wie nicht weiter ausgeführt werden soll,

$$\left.\begin{aligned} J_1&=\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(\lambda-\overline{x\pm Vt})\,d\alpha=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(\lambda-\overline{x\pm Vt})^2}{4a^2t}},\\ J_2&=\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha(\lambda-\overline{x\pm Vt})\,d\alpha=\frac{1}{aVt}\,e^{-\frac{(\lambda-\overline{x\pm Vt})^2}{4a^2t}}\int_0^{\frac{\lambda-\overline{x\pm Vt}}{2aVt}} e^{+\gamma^2}\,d\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots (27).$$

Während J_1 (das übrigens in mancherlei theoretischen Untersuchungen auftritt) in dieser Form belassen werden kann, ist es bei J_2 zweckmäßig, sich einer Reihenentwicklung zu bedienen. Ferner läßt sich zeigen, daß

$$J_3=\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(\lambda-x)\sin\alpha Vt\,d\alpha=\frac{V\pi}{2}\int_{\frac{\lambda-\overline{x+Vt}}{2aVt}}^{\frac{\lambda-\overline{x-Vt}}{2aVt}} e^{-\gamma^2}\,d\gamma \quad \ldots\ldots (28)$$

ausfallen muß, während

$$J_4=\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha(\lambda-x)\sin\alpha Vt\,d\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (29)$$

sich nicht weiter auf eine einfachere Formel zurückführen läßt. Auch hier wird man zu einer Reihenentwicklung greifen müssen. Was J_3 anlangt, so ist es stets als Summe von Gaußschen Fehlerintegralen darstellbar, die bekanntlich tabelliert vorliegen (vgl. z. B. Hayashi: Fünfstellige Funktionentafeln, Berlin 1930). Die Lösung der gestellten Anfangswertaufgabe sieht daher so aus:

$$\left.\begin{aligned}
U(x,t) &= \frac{1}{2\pi K}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \left\{\int_0^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha(\lambda-x-Vt)\,\mathrm{d}\alpha + \int_0^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha(\lambda-x+Vt)\,\mathrm{d}\alpha\right\}\\
&\quad + \frac{1}{\pi K V}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\int_0^{\infty}\frac{1}{\alpha}\,e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha(\lambda-x)\sin\alpha V t\,\mathrm{d}\alpha,\\
W(x,t) &= \frac{1}{4a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\left\{e^{-\frac{(\lambda-x-Vt)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(\lambda-x+Vt)^2}{4a^2t}}\right\} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\int_{\frac{\lambda-x+Vt}{2aVt}}^{\frac{\lambda-x-Vt}{2aVt}} e^{-\gamma^2}\,\mathrm{d}\gamma
\end{aligned}\right\} \quad (30).$$

Die in dieser Lösung auftretenden Funktionen, die zunächst ganz allgemein sein können, müssen nun, nach Maßgabe der gerade vorliegenden Aufgabe, entsprechend spezialisiert werden. Dabei ist aber zu beachten, daß sie so gewählt werden müssen, daß die entsprechenden Integrale tatsächlich existieren. Eine Möglichkeit der Spezialisierung besteht z. B. darin, für $t=0$ zwar ein bestimmtes Profil für die Vertikalverschiebung an der Oberfläche vorzugeben, die Bewegung des Mediums aber aus der Ruhe heraus erfolgen zu lassen. Dann hätte man $g(x) \equiv 0$ zu setzen und (30) würde sich wesentlich vereinfachen. Eine andere Möglichkeit bestünde darin, anzunehmen, daß für $t=0$ keine Vertikalverschiebung vorliegt, also $f(x) \equiv 0$ wird, daß aber die Oberflächenteilchen in diesem Augenblick einen vertikalen Impuls bekommen, der ihnen ein Geschwindigkeitsprofil $g(x)$ vorschreibt. Auch in diesem Falle würden sich die Formeln (30) vereinfachen, besonders aber dann, wenn man von dem Impuls voraussetzt, daß er nur in einer kleinen Umgebung des Ursprungs erfolgt, die man dann noch beliebig verengen kann. Dieser Fall, die punktförmige und symmetrische Anregung des Mediums, bietet sich in der Praxis sicher dar, allerdings erst bei der Behandlung des dreidimensionalen Problems. Das Fallen eines schweren Körpers auf die Erdoberfläche, eine Explosion oder ein Bombeneinschlag liefern Beispiele dafür.

Eine weitere Vereinfachung in den Formeln von (30) läßt sich erreichen, wenn man zum Grenzfall des vollkommen elastischen Körpers übergeht. Dann hat man $\lim \varepsilon \to 0$, zufolge (18) mithin $\lim a \to 0$ zu setzen. Die Lösung (30) wird dann zu

$$\left.\begin{aligned}
U(x,t) &= \frac{1}{2\pi K}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\int_0^{\infty}\sin\alpha(\lambda-x-Vt)\,\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2\pi K}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\int_0^{\infty}\sin\alpha(\lambda-x+Vt)\,\mathrm{d}\alpha\\
&\quad + \frac{1}{\pi K V}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\int_0^{\infty}\frac{1}{\alpha}\sin\alpha(\lambda-x)\sin\alpha V t\,\mathrm{d}\alpha,\\
W(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\int_0^{\infty}\cos\alpha(\lambda-x-Vt)\,\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\int_0^{\infty}\cos\alpha(\lambda-x+Vt)\,\mathrm{d}\alpha\\
&\quad + \frac{1}{\pi V}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\int_0^{\infty}\frac{1}{\alpha}\cos\alpha(\lambda-x)\sin\alpha Vt)\,\mathrm{d}\alpha
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Liest man den Fourierschen Integralsatz (24) von rechts nach links, so erkennt man, daß die erste Zeile im Ausdruck für W zu

$$\frac{1}{2}\,[f(x-Vt)+f(x+Vt)]$$

wird, während die zweite Zeile noch einer geringfügigen Umformung bedarf. Es ist nämlich

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\alpha}\sin\alpha Vt\cdot\cos\alpha(\lambda-x)\,\mathrm{d}\alpha = \int_0^{\infty}\frac{1}{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\gamma\,\mathrm{d}\alpha = \begin{cases} 0 \text{ für } \gamma > 1,\\ \frac{\pi}{4} \;\;,, \;\; \gamma = 1,\\ \frac{\pi}{2} \;\;,, \;\; 1 > \gamma > -1, \text{ wo } \gamma = \frac{\lambda-4}{Vt}\\ \frac{\pi}{4} \;\;,, \;\; \gamma = -1,\\ 0 \;\;,, \;\; \gamma < -1 \end{cases} \quad (32).$$

eines jener Integrale, die von einem Parameter (hier γ) unstetig abhängen[3]). Im Hinblick auf die Abhängigkeit des Parameters von x und t kann man auch sagen, das Integral habe den Wert

0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
$\lambda > x + Vt,$	$\lambda = x + Vt,$	$x - Vt < \lambda < x + Vt,$	$\lambda = x - Vt,$	$\lambda < x - Vt.$

Zum Doppelintegral der zweiten Zeile liefern daher nur jene Werte des λ einen Beitrag, die zwischen den Grenzen $x - Vt$ und $x + Vt$ liegen. Es ist somit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\,d\lambda \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \cos \alpha(\lambda - x) \sin \alpha V t \; d\alpha = \frac{\pi}{2} \int_{x-Vt}^{x+Vt} g(\lambda)\,d\lambda.$$

Das entsprechende Doppelintegral im Ausdruck für U läßt sich ebenfalls auf ein einfaches Integral zurückführen. Es läßt sich zeigen, daß

$$\int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \sin \alpha V t \sin \alpha(\lambda - x)\,d\alpha = \frac{1}{4} \log\left(\frac{\lambda - x - Vt}{\lambda - x + Vt}\right)^2$$

ausfallen muß. Für die Verschiebungen $U(x,t)$, $W(x,t)$ des Bodenteilchens findet man daher

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \frac{1}{2\pi K} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,d\lambda \left\{ \int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2 t} \sin \alpha(\lambda - x - Vt)\,d\alpha + \int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2 t} \sin \alpha(\lambda - x + Vt)\,d\alpha \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi K V} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \log\left(\frac{\lambda - x - Vt}{\lambda - x + Vt}\right)^2 d\lambda, \\ W(x,t) &= \frac{1}{2}[f(x - Vt) + f(x + Vt)] + \frac{1}{2V} \int_{x-Vt}^{x+Vt} g(\lambda)\,d\lambda \end{aligned} \qquad (33).$$

Dies ist die Lösung des Anfangswertproblems für den Fall, daß das Medium als vollkommen elastisch vorausgesetzt wird. Der Ausdruck für W ist deshalb bemerkenswert, weil es derselbe ist, der auch in der Theorie der schwingenden Saite auftritt, wenn man das entsprechende Anfangswertproblem löst (Saite unbegrenzt, gegeben Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit der einzelnen Saitenpunkte). Die Deutung der Lösung ist hier wie dort gleich, so daß es sich erübrigt, darauf einzugehen. Erfolgt die Bewegung aus der Ruhelage heraus, so ist $f(x) \equiv 0$ zu setzen und die Lösung wird zu

$$U(x,t) = \frac{1}{4\pi K V} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \log\left(\frac{\lambda - x - Vt}{\lambda - x + Vt}\right)^2 d\lambda, \qquad W(x,t) = \frac{1}{2V} \int_{x-Vt}^{x+Vt} g(\lambda)\,d\lambda \quad \ldots \; (34).$$

Das dreidimensionale Problem.

3. Die Partikularlösungen. Zu integrieren ist jetzt (I) mit den Oberflächenbedingungen (2). Der Ansatz

$$u = e^{ipt}\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial z}\right), \quad v = e^{ipt}\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial y} + \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z}\right), \quad w = e^{ipt}\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + k^2 X\right) \quad . \; . \; (35)$$

führt dazu, von den neu eingeführten Funktionen Φ^* und X, die nunmehr von der Zeit nicht mehr abhängen, das Erfülltsein von

$$\Delta \Phi^* + h^2 \Phi^* = 0, \qquad \Delta X + k^2 X = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \; (36)$$

zu verlangen, wo

$$h^2 = \frac{\varrho p^2}{(\lambda + 2\mu) + ip(\lambda' + 2\mu')}, \qquad k^2 = \frac{\varrho p^2}{\mu + ip\mu'}, \qquad p = \bar{p} + i\varepsilon \quad \ldots \; (37)$$

[3]) Wegen der Behandlung dieses Integrals siehe z. B. B. Riemann: Partielle Differentialgleichungen, § 15 (Neuausgabe von Fritz Emde, Braunschweig 1938).

gesetzt wurde. Da die Verschiebungen u, v, w zu Oberflächenwellen gehören sollen, wird man

$$\Phi^* = e^{-q_1 z} K(x, y), \qquad X = e^{-q_2 z} K(x, y)$$

setzen. Die Konstanten q_1 und q_2 sind wieder reell und positiv vorauszusetzen. Zusammen mit den Oberflächenbedingungen erhält man dann für $K(x, y)$ die folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + a^2 K = 0 \quad \ldots \quad (38),$$

$$a^2 = q_1^2 + h^2, \qquad a^2 = q_2^2 + k^2 \quad \ldots \quad (39).$$

Der Übergang zu Polar- bzw. zu Zylinderkoordinaten vermöge $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $z = z$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ bewirkt, daß sie in

$$\frac{\partial^2 K}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial K}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 K}{\partial \vartheta^2} + a^2 K = 0$$

übergeht. Wie beim Problem der schwingenden Membran setzt man nun

$$K = J_n(ar) \begin{matrix}\cos n\vartheta \\ \sin n\vartheta\end{matrix} \qquad n \geqq 0, \quad \text{ganz},$$

und erreicht durch die Forderung, daß n ganzzahlig sei, daß K eine eindeutige Funktion von ϑ wird: bei Vermehrung des ϑ um 2π reproduziert sich der Wert der Funktion[4]).

Für $J_n(ar)$ aber ergibt sich als Forderung das Bestehen der Besselschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 J_n}{d(ar)^2} + \frac{1}{ar}\frac{d J_n}{d(ar)} + \left(1 - \frac{n^2}{(ar)^2}\right) J_n = 0 \quad \ldots \quad (40),$$

wodurch sie als Besselsche Funktion vom Index n definiert ist, und zwar als eine solche erster Art, denn die Besselschen Funktionen zweiter Art oder Neumannschen Zylinderfunktionen genügen zwar auch dieser Differentialgleichung, sind aber physikalisch unbrauchbar, da sie an der Stelle $r = 0$ logarithmisch unendlich werden. Unter A_n, B_n, A_n', B_n' willkürliche Konstanten verstanden, wird mithin

$$\left.\begin{aligned} \Phi_n^* &= e^{-q_1 z}(A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta)\, J_n(ar), \\ & \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\ X &= e^{-q_2 z}(A_n' \cos n\vartheta + B_n' \sin n\vartheta)\, J_n(ar) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (41),$$

und damit sind die Verschiebungskomponenten u, v, w festgelegt. Nach Einführung der Zylinderkoordinaten interessieren aber nicht mehr die Verschiebungskomponenten längs der Koordinatenachsen, sondern die Radialverschiebung u_r und die Tangentialverschiebung u_ϑ, die, wie man sich an Hand von Bild 1 leicht überzeugt, mit u, v, w durch

$$\left.\begin{aligned} u_r &= u\cos\vartheta + v\sin\vartheta, \\ u_\vartheta &= -u\sin\vartheta + v\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (42)$$

zusammenhängen. Ebenso wird man nun nicht mehr nach den Spannungskomponenten p_{xx}, p_{xy}, ... fragen, sondern nach den Komponenten p_{rr}, $p_{r\vartheta}$, $p_{\vartheta\vartheta}$, p_{rz}, $p_{\vartheta z}$, p_{zz}. Die elastische Spannung hat den Charakter einer Tensordichte, d. h. die Transformationsformeln für die einzelnen Komponenten beim Übergang von einem (beliebigen, auch krummlinigen) Koordinatensystem zum andern sind mit der Funktionaldeterminante der Transformation behaftet (auf diesen Umstand hat erstmalig L. Brillouin [3] hingewiesen). Bei Berücksichtigung dieses Umstandes ist es nicht schwer, die fraglichen Spannungskomponenten auch tatsächlich zu berechnen. Im Gesamten lautet das Ergebnis:

Bild 1.

Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned} u_r &= a e^{ipt}(M_n e^{-q_1 z} - q_2 M_n' e^{-q_2 z})\, J_n'(ar), \\ n_\vartheta &= \frac{n}{r} e^{ipt}(N_n e^{-q_1 z} - q_2 N_n' e^{-q_2 z})\, J_n(ar), \\ w &= e^{ipt}[-q_1 M_n e^{-q_1 z} + (q_2^2 + k^2) M_n' e^{-q_2 z}]\, J_n(ar) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (43).$$

[4]) An sich wären auch negative, ganzzahlige Werte von n zuzulassen, doch genügt im folgenden die Berücksichtigung der $n \geqq 0$.

Z. angew. Math. Mech. Bd. 25/27 Nr. 1 April 1947

Spannungen

$$\left.\begin{aligned} p_{rz} &= \mu a r e^{ipt}\left[-2q_1 M_n e^{-q_1 z} + (2q_2^2 + k^2) M_n' e^{-q_2 z}\right] J_n', \\ p_{\vartheta z} &= \mu \frac{n}{r} e^{ipt}\left[-2q_1 N_n e^{-q_1 z} + (2q_2^2 + k^2) N_n' e^{-q_2 z}\right] J_n, \\ p_{zz} &= e^{ipt}\left[(-\lambda h^2 + 2\mu q_1^2) M_n e^{-q_1 z} - 2\mu a^2 q_2 M_n' e^{-q_2 z}\right] J_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (44)$$

Hier wurden die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta &= M_n, & -A_n \sin n\vartheta + B_n \cos n\vartheta &= N_n, \\ A_n' \cos n\vartheta + B_n' \sin n\vartheta &= M_n', & -A_n' \sin n\vartheta + B_n' \cos n\vartheta &= N_n' \end{aligned}\right\} \quad \ldots (45)$$

verwendet. Die weiteren Überlegungen verlaufen wie im zweidimensionalen Fall. Aus den Oberflächenbedingungen läßt sich, bis auf einen willkürlichen Faktor genau, das System der Konstanten A_n, B_n, A_n', B_n' berechnen. Das Verschwinden der Determinante des entsprechenden Linearsystems führt auf dieselbe Gl. (9) für $\varkappa$, so daß man für die Dämpfung ε und die Wellengeschwindigkeit V wieder die Ausdrücke (10) erhält. Auch die Ausdrücke (11) für q_1 und q_2 bleiben unverändert. Die gesuchte, partikuläre Lösung des Problems nimmt bei Berücksichtigung all dieser Umstände sowie Zusammenziehungen die Gestalt an

$$\boxed{\begin{aligned} u_r &= a\,\Gamma_1(a,z)\,e^{-\varepsilon t}\left[\cos aVt\,(a_n \cos n\vartheta + a_n' \sin n\vartheta) - \sin aVt\,(b_n \cos n\vartheta + b_n' \sin n\vartheta)\right] J_n'(ar), \\ u_\vartheta &= \frac{n}{r}\,\Gamma_1(a,z)\,e^{-\varepsilon t}\left[\cos aVt\,(-a_n \sin n\vartheta + a_n' \cos n\vartheta) - \sin aVt\,(-b_n \sin n\vartheta + b_n' \cos n\vartheta)\right] J_n(ar), \\ w &= a\frac{1-\varkappa}{\sqrt{1-2\varkappa}}\,\Gamma_2(a,z)\,e^{-\varepsilon t}\left[\cos aVt\,(a_n \cos n\vartheta + a_n' \sin n\vartheta) - \sin aVt\,(b_n \cos n\vartheta + b_n' \sin n\vartheta)\right] J_n(ar) \end{aligned}} \quad \ldots (46)$$

Entsprechendes hätte man für die Spannungen durchzuführen. In der Tat gehören Verschiebungen und Spannungen insofern zusammen, als zu jeder, durch Superposition gefundenen neuen Lösung auch neue Spannungen gehören, die man durch Superposition der alten Partikularspannungen findet [5]).

Daß schon einer einzelnen Partukilarlösung aus (46) physikalische Bedeutung zukommen kann, ersieht man aus folgendem Sonderfall: denkt man sich die Anfangsbedingungen so beschaffen, daß das Erschütterungsfeld um den Herd zylindersymmetrisch ist (wie es etwa bei einer Sprengung an der Erdoberfläche, einem Bombenwurf, einem schweren Fall eintreten wird), so muß die gesuchte Lösung frei sein vom Azimut ϑ. Wir erkennen aus (46), daß schon die nullte Partikularlösung zur Beschreibung solcher Vorgänge herangezogen werden kann. Man erhält nämlich

$$\left.\begin{aligned} u_r &= -\Gamma_1(a,z)\,e^{-\varepsilon t}\,(a_0 \cos aVt - b_0 \sin aVt)\,J_1(ar), \qquad u_\vartheta = 0, \\ w &= \frac{1-\varkappa}{\sqrt{1-2\varkappa}}\,\Gamma_2(a,z)\,e^{-\varepsilon t}\,(a_0 \cos aVt - b_0 \sin aVt)\,J_0(ar) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (47).$$

Hier wurde auf die aus der Theorie der Zylinderfunktionen bekannte Beziehung [5]

$$J_0'(ar) = -J_1(ar)$$

zurückgegriffen und außerdem der sowohl in u_r als auch in w auftretende Faktor $\varkappa$ mit den willkürlichen Konstanten vereinigt[6]). Die in den Konstanten a_0, b_0, a liegende Willkür kann

---

[5]) Was die Partikularlösungen (46) anlangt, so unterscheiden sie sich von den vom Verf. auf anderem Wege [4] gefundenen Lösungen

$$\begin{aligned} u &= f\,\Gamma_1(a,z)\,e^{-\varepsilon t} \cos a(\gamma \pm Vt), & u &= -f\,\Gamma_1(a,z)\,e^{-\varepsilon t} \sin a(\gamma \pm Vt), \\ v &= g\,\Gamma_1(a,z)\,e^{-\varepsilon t} \cos a(\gamma \pm Vt), & v &= -g\,\Gamma_1(a,z)\,e^{-\varepsilon t} \sin a(\gamma \pm Vt), \\ w &= \frac{a(1-\varkappa)}{\sqrt{1-2\varkappa}}\,\Gamma_2(a,z)\,e^{-\varepsilon t} \sin a(\gamma \pm Vt), & w &= \frac{a(1-\varkappa)}{\sqrt{1-2\varkappa}}\,\Gamma_2(a,z)\,e^{-\varepsilon t} \cos a(\gamma \pm Vt), \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{f}{a}x + \frac{g}{a}y, \qquad a = \sqrt{f^2 + g^2}, \qquad f,\ g, \text{ willkürliche Konstanten,}$$

und es wäre der Nachweis zu erbringen, daß sie diesen nicht widersprechen. Dieser Nachweis gelingt, wenn man die letztgenannten Lösungen, die Planwellen darstellen, durch Superposition zu Zylinderwellen zusammenfügt. Die im Text gegebenen Lösungen (46) erweisen sich dann als Folgen der hier angeführten. Vgl. dazu die Darstellung der Theorie der Zylinderfunktionen von R. Weyrich [5], in der der Versuch gemacht wird, die Erzeugung von Zylinderwellen durch Überlagerung von Planwellen zur Grundlage der Darstellung zu machen.

[6]) Das Ergebnis ist in Übereinstimmung mit einem schon früher [4] vom Verfasser hergeleiteten, erscheint hier aber als Sonderfall der allgemeineren Partikularlösungen.

dazu benutzt werden, eine zu suchende Lösung durch Überlagerung den zylindersymmetrischen Anfangsbedingungen anzupassen.

4. Die Anfangswertaufgabe. Um die allgemeine Lösung $U_r(r,\vartheta,z,t)$, $U_\vartheta(r,\vartheta,z,t)$, $W(r,\vartheta,z,t)$ aufzustellen und dann beliebigen Anfangsbedingungen anzupassen, wird man die ganze Willkür ausnutzen, die in a_n, a'_n, b_n, b'_n, α enthalten ist, d. h. man wird alle Partikularlösungen (47) überlagern. Dies bedeutet, daß man nicht nur die zu den verschiedenen Indizes $n = 0, 1, 2, \ldots$ gehörigen Lösungen durch Reihenbildung superponiert, sondern daß man auch eine Überlagerung der verschiedenen, zu α gehörigen Lösungen, also eine Integration nach α vornimmt. Darnach ist es leicht, die allgemeine Lösung hinzuschreiben. Wie im zweidimensionalen Fall machen wir wieder vereinfachende Annahmen: Gegeben sowohl wie gefragt sollen nur Daten von der Oberfläche $z=0$ sein, die Wellenausbreitung sei dispersionsfrei [es gelte also (19) statt (10)]. Die so verstandene Lösung werde mit $U_r(r,\vartheta,t)$, $U_\vartheta(r,\vartheta,t)$, $W(r,\vartheta,t)$ bezeichnet und sieht folgendermaßen aus:

$$\left.\begin{aligned}
U_r(r,\vartheta,t) &= \int_0^\infty \alpha e^{-\varepsilon t} \sum_{n=0}^{\infty} [\cos \alpha V t\,(\;\;a_n \cos n\vartheta + a'_n \sin n\vartheta) \\
&\qquad - \sin \alpha V t\,(\;\;b_n \cos n\vartheta + b'_n \sin n\vartheta)]\, J'_n(\alpha r)\, d\alpha, \\
U_\vartheta(r,\vartheta,t) &= \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} [\cos \alpha V t\,(-a_n \sin n\vartheta + a'_n \cos n\vartheta) \\
&\qquad - \sin \alpha V t\,(-b_n \sin n\vartheta + b'_n \cos n\vartheta)]\, J_n(\alpha r)\, d\alpha, \\
W(r,\vartheta,t) &= K \int_0^\infty \alpha e^{-\varepsilon t} \sum_{n=0}^{\infty} [\cos \alpha V t\,(\;\;a_n \cos n\vartheta + a'_n \sin n\vartheta \\
&\qquad - \sin \alpha V t\,(\;\;b_n \cos n\vartheta + b'_n \sin n\vartheta)]\, J_n(\alpha r)\, d\alpha
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (48).$$

Wir lösen folgende Anfangswertaufgabe:

1. Im Zeitpunkt $t=0$ soll für die Vertikalverschiebung an der Oberfläche ein „Profil" $f(r,\vartheta)$ vorgeschrieben sein:

$$t = 0, \qquad W(r,\vartheta,0) = f(r,\vartheta) \quad \ldots \quad (49).$$

2. Die Verschiebungen sollen aus einer bestimmten Verteilung der vertikalen Anfangsgeschwindigkeiten $g(r,\vartheta)$ hervorgehen.

$$t = 0, \quad \left(\frac{\partial W(r,\vartheta,t)}{\partial t}\right)_{t=0} = g(r,\vartheta) \quad \ldots \quad (50),$$

d. h. es ist für den Anfang der Bewegung auch ein bestimmtes, an die Oberfläche gebundenes „Geschwindigkeitsprofil" der Vertikalkomponente vorgeschrieben.

Gefragt ist nach der Teilchenverschiebung zu einem beliebigen Zeitpunkt. Auch hier, beim dreidimensionalen Problem zeigt es sich, daß durch diese beiden Anfangsbedingungen die willkürlichen Funktionen vollkommen festgelegt werden können, daß also die übrigen Komponenten nicht mehr frei verfügbar sind. Ist der vertikale Verzerrungszustand festgelegt, so sind dadurch auch die horizontalen Verzerrungen mitbestimmt und mit ihnen auch die Spannungen, die ihren Ausgleich in den Schwingungen des Mediums finden, deren räumlichzeitlichen Ablauf eben die Lösung des Anfangswertproblems beschreibt. Dabei ist unter „Schwingung" nicht nur eine oszillatorische Bewegung zu verstehen — denn bei unbegrenztem Medium wird man von vornherein kein Oszillieren erwarten können —, sondern ganz allgemein die Teilchenbewegung unter dem Einfluß einer Anfangsanregung. Auf (48) angewendet, hat man es also mit folgenden Anfangsbedingungen zu tun:

$$\left.\begin{aligned}
f(r,\vartheta) &= K \int_0^\infty \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + a_n \sin n\vartheta)\, J_n(\alpha r)\, d\alpha, \\
g(r,\vartheta) &= -K \int_0^\infty \alpha \sum_{n=0}^{\infty} [(\varepsilon a_n + \alpha V b_n) \cos n\vartheta + (\varepsilon a'_n + \alpha V b'_n) \sin n\vartheta]\, J_n(\alpha r)\, d\alpha
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (51)$$

Um nun die Funktionen $a_n(\alpha)$, $a'_n(\alpha)$, ... so zu bestimmen, daß diese Bedingungen erfüllt werden, greifen wir auf den bekannten Satz aus der Theorie der Besselschen Funktionen zurück, der einerseits eine Verallgemeinerung der Fourierschen Reihe, andererseits eine solche des Fourierschen Integrals darstellt und folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned}
F(r,\vartheta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J_0(\alpha r)\,\alpha\, d\alpha \int_0^\infty J_0(\alpha\tau)\,\tau\, d\tau \int_0^{2\pi} F(\tau,\beta)\, d\beta \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty J_n(\alpha r)\,\alpha\, d\alpha \int_0^\infty J_n(\alpha\tau)\,\tau\, d\tau \int_0^{2\pi} F(\tau,\beta) \cos n\beta\, d\beta \cdot \cos n\vartheta \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty J_n(\alpha r)\,\alpha\, d\alpha \int_0^\infty J_n(\alpha\tau)\,\tau\, d\tau \int_0^{2n} F(\tau,\beta) \sin n\beta\, d\beta \cdot \sin n\vartheta
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (52).$$

Die erste Gleichung von (51), die man auch in der Form anschreiben kann

$$f(r,\vartheta) = K\int_0^\infty J_0(ar)\, a\, \mathrm{d}a \cdot a_0(a)$$
$$+ K\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty J_n(ar)\, a\, \mathrm{d}a\, a_n(a)\cdot\cos n\vartheta + K\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty J_n(ar)\, a\,\mathrm{d}a\, a_n'(a)\cdot\sin n\vartheta$$

zeigt nun beim Vergleich mit (52) und Identifizierung von $F(r,\vartheta)$ mit $f(r,\vartheta)$, daß

$$a_n(a) = \frac{1}{\pi K} L_n^{(1)}(a), \qquad a_n'(a) = \frac{1}{\pi K} M_n^{(1)}(a), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ausfallen muß, wo nun

$$\left.\begin{aligned} L_0^{(1)}(a) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty J_0(a\tau)\tau\,\mathrm{d}\tau\int_0^{2\pi} f(\tau,\beta)\,\mathrm{d}\beta, \\ L_n^{(1)}(a) &= \int_0^\infty J_n(a\tau)\tau\,\mathrm{d}\tau\int_0^{2\pi} f(\tau,\beta)\cos n\beta\,\mathrm{d}\beta, \\ &\qquad n = 1, 2, \ldots \\ M_n^{(1)}(a) &= \int_0^\infty J_n(a\tau)\tau\,\mathrm{d}\tau\int_0^{2\pi} f(\tau,\beta)\sin n\beta\,\mathrm{d}\beta \end{aligned}\right\} \qquad (53).$$

gesetzt wurde. Ebenso bestimmt man durch Entwicklung von $g(r,\vartheta)$ die Koeffizienten $b_n(a)$, $b_n'(a)$:

$$b_n(a) = -\frac{1}{a\pi K V} L_n^{(2)}(a), \qquad b_n'(a) = -\frac{1}{a\pi K V} M_n^{(2)}(a), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

mit

$$\left.\begin{aligned} L_0^{(2)}(a) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty J_0(a,\tau)\tau\,\mathrm{d}\tau\int_0^{2\pi}[f(\tau,\beta)+\varepsilon g(\tau,\beta)]\,\mathrm{d}\beta, \\ L_n^{(2)}(a) &= \int_0^\infty J_n(a\tau)\tau\,\mathrm{d}\tau\int_0^{2\pi}[f(\tau,\beta)+\varepsilon g(\tau,\beta)]\cos n\beta\,\mathrm{d}\beta, \\ &\qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\ M_n^{(2)}(a) &= \int_0^\infty J_n(a\tau)\tau\,\mathrm{d}\tau\int_0^{2\pi}[f(\tau,\beta)+\varepsilon g(\tau,\beta)]\sin n\beta\,\mathrm{d}\beta \end{aligned}\right\} \qquad (54).$$

Damit ist die gestellte Anfangswertaufgabe gelöst, denn man hat nur die gefundenen Ausdrücke in (48) einzutragen. Das Ergebnis läßt sich in folgendem Satz ausdrücken:

Es möge die Verschiebung eines, der Oberfläche $z=0$ des Mediums angehörenden Massenpunktes in Richtung des Radiusvektors mit $U_r(r,\vartheta,t)$, in Richtung senkrecht dazu mit $U_\vartheta(r,\vartheta,t)$ und in vertikaler Richtung mit $W(r,\vartheta,t)$ bezeichnet werden. Wird nun die Vertikalkomponente im Zeitpunkt $t=0$ den Bedingungen (49) und (50) unterworfen, so sind die Verschiebungen zu jedem anderen Zeitpunkt gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} U_r(r,\vartheta,t) &= \frac{1}{\pi K}\sum_{n=0}^\infty\left\{\int_0^\infty a e^{-\varepsilon t} J_n'(ar) L_n^{(1)}(a)\cos aVt\,\mathrm{d}a + \frac{1}{V}\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} J_n'(ar) L_n^{(2)}(a)\sin aVt\,\mathrm{d}a\right\}\cos n\vartheta \\ &+ \frac{1}{\pi K}\sum_{n=0}^\infty\left\{\int_0^\infty a e^{-\varepsilon t} J_n'(ar) M_n^{(1)}(a)\cos aVt\,\mathrm{d}a + \frac{1}{V}\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} J_n'(ar) M_n^{(2)}(a)\sin aVt\,\mathrm{d}a\right\}\sin n\vartheta, \\ U_\vartheta(r,\vartheta,t) &= \frac{1}{\pi r K}\sum_{n=1}^\infty n\left\{\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} J_n(ar) M_n^{(1)}(a)\cos aVt\,\mathrm{d}a + \frac{1}{V}\int_0^\infty \frac{1}{a} e^{-\varepsilon t} J_n(ar) M_n^{(2)}(a)\sin aVt\,\mathrm{d}a\right\}\cos n\vartheta \\ &+ \frac{1}{\pi r K}\sum_{n=1}^\infty n\left\{\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} J_n(ar) L_n^{(1)}(a)\cos aVt\,\mathrm{d}a + \frac{1}{V}\int_0^\infty \frac{1}{a} e^{-\varepsilon t} J_n(ar) L_n^{(2)}(a)\sin aVt\,\mathrm{d}a\right\}\sin n\vartheta, \\ W(r,\vartheta,t) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\left\{\int_0^\infty a e^{-\varepsilon t} J_n(ar) L_n^{(1)}(a)\cos aVt\,\mathrm{d}a + \frac{1}{V}\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} J_n(ar) L_n^{(2)}(a)\sin aVt\,\mathrm{d}a\right\}\cos n\vartheta \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\left\{\int_0^\infty a e^{-\varepsilon t} J_n(ar) M_n^{(1)}(a)\cos aVt\,\mathrm{d}a + \frac{1}{V}\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} J_n(ar) L_n^{(2)}(a)\sin aVt\,\mathrm{d}a\right\}\sin n\vartheta \end{aligned}\right\} \qquad (55).$$

Die hier auftretenden Funktionen $L_n^{(1)}(a), \ldots$ sind durch (53), (54) bestimmt. Bei zylindersymmetrischen Anfangsbedingungen werden $f(r,\vartheta)$ und $g(r,\vartheta)$ frei von ϑ. Die Vereinfachungen, die sich dadurch ergeben, sind leicht ersichtlich. Die Lösung der Anfangswertaufgabe sieht so aus:

$$U_r(r,t) = -\frac{1}{\pi K}\left\{\int_0^\infty a e^{-\varepsilon t} J_1(ar) L_0^{(1)}(a) \cos a V t \, d a + \frac{1}{V}\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} J_1(ar) L_0^{(2)}(a) \sin a V t \, d a\right\}$$

$$U_\vartheta(r,t) \equiv 0, \qquad (56).$$

$$W(r,t) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\infty a e^{-\varepsilon t} J_0(ar) L_0^{(1)}(a) \cos a V t \, d a + \frac{1}{V}\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} J_0(ar) L_0^{(2)}(a) \sin a V t \, d a\right\}$$

So wie die Anfangsbedingungen, ist auch die Lösung zylindersymmetrisch. Die Bewegung aller Massenpunkte gleicher Herddistanz erfolgt gleichartig und keiner verläßt, wie aus dem Verschwinden der Komponente $U_\vartheta(r,t)$ hervorgeht, die Vertikalebene durch den Radiusvektor. Die Lösung (56) hätte übrigens auch unmittelbar aus (47) durch Superposition hergeleitet werden können.

Was die Anwendung der hier abgeleiteten Resultate auf die Praxis anlangt, so könnte man etwa an folgende Fragestellung denken: Eine Vertikalverschiebung der Massenteilchen der Oberfläche zu Anfang der Zeitrechnung findet überhaupt nicht statt, d. h. es ist $f(r,\vartheta) = f(r) \equiv 0$. In einer bestimmten, kreisförmigen Umgebung des Ursprungs (des Herdes), die beliebig klein angenommen werden kann, erfahren die Massenpunkte in der Vertikalen einen plötzlichen Stoß (z. B. Fall einer schweren Kugel). Die Funktion $g(r,\vartheta)$ wird dann nicht nur von r allein abhängen, sondern auch so beschaffen sein, daß sie nur innerhalb des genannten kreisförmigen Bereiches nicht identisch verschwindet. In der entsprechenden Lösung

$$U_r(r,t) = -\frac{2}{KV}\int_0^\infty \varepsilon e^{-\varepsilon t} J_1(ar) \sin a V t \, d a \int_0^\infty J_0(a,\tau) g(\tau) \tau \, d\tau, \qquad U_\vartheta(r,t) \equiv 0,$$

$$W(r,t) = \frac{2}{V}\int_0^\infty \varepsilon e^{-\varepsilon t} J_0(ar) \sin a V t \, d a \int_0^\infty J_0(a\tau) g(\tau) \tau \, d\tau$$

werden dann die oberen Grenzen der inneren Integrale auf einen endlichen Wert herabgesetzt werden können. Unter bestimmten Voraussetzungen über das Unendlichwerden der Funktion $g(r)$ an der Stelle $r=0$ kann man weiter zu dem Grenzfall übergehen, daß der Radius des Kreisbereiches unendlich klein, die angeregte Stelle also punktförmig wird. Die entsprechenden Lösungen der Anfangswertaufgabe werden dadurch weiter vereinfacht.

Schrifttumverzeichnis.

[1] E. Hardtwig: Über die Wellenausbreitung in einem visko-elastischen Medium. Z. Geophys. Bd. 18 (1943).
[2] Lord Rayleigh: On Waves propagated along the Plane Surface of an elastic Solid. Scientific Papers II (1881 bis 1887); H. Lamb: On the Propagation of tremors over the Surface of an Elastic Solid. Phil. Trans. (A) 293, S. 1 bis 42.
[3] Léon Brillouin: Les Tenseurs en Mécanique et en Elasticité. Paris 1938, S. 215 ff.
[4] E. Hardtwig: Zur Theorie der Rayleighwellen. Z. Geophys. Bd. 18 (1943).
[5] R. Weyrich: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen. Leipzig 1937.

Die Randbedingungen der Airyschen Spannungsfunktion bei vorgegebenen Randverschiebungen.

Von *F. Rellich* in Göttingen.

1. Das Verhalten einer Platte, deren Durchbiegung nicht mehr klein ist gegenüber der Plattendicke, wurde in den letzten Jahren mehrfach mit Hilfe der beiden von Kármánschen Differentialgleichungen[1]) für die Spannungsfunktion $\Phi(x, y)$ und die Durchbiegung $w(x,y)$ beschrieben:

$$\Delta\Delta\Phi = E\,(w_{xy}^2 - w_{xx}\,w_{yy})$$

$$\frac{E\,h^2}{12\,(1-\nu^2)}\,\Delta\Delta w = \Phi_{yy}\,w_{xx} - 2\,\Phi_{xy}\,w_{xy} + \Phi_{xx}\,w_{yy} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

[1]) Th. v. Kármán, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. IV Art. 27 insbesondere S. 350 (1910). Literaturübersicht bis 1939 bei K. O. Friedrichs und J. J. Stoker, The nonlinear boundary value problem of the buckled plate, Nat. Acad. of Sciences, Vol. 25, S. 535—540 (1939).

(E Elastizitätsmodul, h Plattendicke, ν Poissonsche Zahl). Die (über die Plattendicke gemittelten) Verschiebungen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ ergeben sich, sobald Φ und w nach (1) bestimmt sind, aus den Gleichungen

$$u_x = \frac{1}{E}(\Phi_{yy} - \nu\Phi_{xx}) - \frac{w_x^2}{2}$$

$$v_y = \frac{1}{E}(\Phi_{xx} - \nu\Phi_{yy}) - \frac{w_y^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2),$$

$$u_y + v_x = -\frac{2(1+\nu)}{E}\Phi_{xy} - w_x w_y$$

und zwar ergeben sich alle Lösungspaare von (2) aus einem bestimmten Paar u, v in der Form $u + c_0 y + c_1$, $v - c_0 x + c_2$ mit geeigneten Konstanten c_0, c_1, c_2. Die (über die Plattendicke gemittelten) Spannungen sind $\sigma_x = \Phi_{yy}$, $\sigma_y = \Phi_{xx}$, $\tau = -\Phi_{xy}$.

Die Gleichungen der linearisierten Theorie entstehen, wenn in (1) und (2) die in w quadratischen Glieder gestrichen werden.

Als Randbedingungen treten zu (1) zunächst die Bedinungen für die Durchbiegung w je nach den am Rande der Platte vorgeschriebenen Verhältnissen (eingespannte Platte, frei gelagerte Platte, usw.). Außerdem sind am Rande der Platte entweder die Oberflächenspannungen p_x, p_y oder die Verschiebungen u, v vorgeschrieben.

Im Falle gegebener Oberflächenspannungen bedeutet das bekanntlich, daß Φ und seine Normalableitung Φ_n auf dem Rande vorgeschrieben sind, und zwar wird, wenn der Rand aus einer geschlossenen Kurve besteht, im Randpunkt, der zur Bogenlänge s gehört[2])

$$\Phi = \int_0^s [(y(s) - y(s'))\, p_x(s') - (x(s) - x(s'))\, p_y(s')]\, ds' + a x + b y + c$$

$$\Phi_n = y_n \int_0^s p_x\, ds' - x_n \int_0^s p_y\, ds' \quad + a x_n + b y_n$$

Die Konstanten a, b, c bleiben willkürlich, können aber durch die weiteren Bedingungen

$$\iint_K \Phi\, dx\, dy = 0 \qquad \iint_K \Phi_x\, dx\, dy = 0 \qquad \iint_K \Phi_y\, dx\, dy = 0$$

eindeutig festgelegt werden; K ist das zugrunde gelegte x, y-Gebiet (Platte im unbelasteten Zustand). Es ergibt sich also hinsichtlich der Randbedingungen für Φ und w kein Unterschied gegenüber der linearisierten Theorie.

2. Im Falle vorgeschriebener Randverschiebungen[3]) u, v ist das anders, und es sollen im folgenden die Randbedingungen angegeben werden, die für Φ und w zu stellen sind, damit die nach (2) errechneten Verschiebungen $u(x, y)$, $v(x, y)$ am Rande die vorgeschriebenen Werte annehmen. Diese Randbedingungen sind, wie mir scheint, auch für die linearen Gleichungen neu und geben dann an, welche Bedingungen beim ebenen Spannungszustand von der Airyschen Spannungsfunktion am Rande erfüllt sein müssen, wenn die Verschiebungen am Rande vorgeschrieben sind. Es seien also Φ, w, u, v vier Funktionen, die den Gl. (2) genügen. Der Rand des zugrunde gelegten Gebietes K in der x, y-Ebene sei gegeben durch eine geschlossene Kurve $x = x(s)$, $y = y(s)$, wo s die Bogenlänge des Randes bedeutet; $x_n = y_s$, $y_n = -x_s$ seien die Komponenten der nach außen weisenden Randnormalen.

Der Gedankengang der folgenden Rechnung ist dieser. Mit u und v sind auf dem Rande auch die Ableitungen u_s, v_s nach der Bogenlänge gegeben. Kann man also u_s, v_s auf Grund der Gl. (2) allein durch Φ und w ausdrücken, so hat man für Φ und w notwendige Randbedingungen gefunden. Der Symmetrie halber wird das nicht für u_s, v_s sondern für die beiden Kombinationen $u_s x_s + v_s y_s$ und $u_s x_n + v_s y_n$ durchgeführt. Die erste läßt sich unmittelbar durch Φ und w allein ausdrücken, die zweite erst nach Differentiation nach s.

Es ist

$$u_s x_s + v_s y_s = u_x x_s^2 + (u_y + v_x)\, x_s y_s + v_y y_s^2$$

also nach (2) auch

$$u_s x_s + v_s y_s = \frac{1}{E}(\Phi_{yy} x_s^2 - 2\Phi_{xy} x_s y_s + \Phi_{xx} y_s^2) - \frac{\nu}{E}(\Phi_{xx} x_s^2 + 2\Phi_{xy} x_s y_s + \Phi_{yy} y_s^2) - \frac{1}{2} w_s^2 =$$

$$= \frac{1+\nu}{E}(\Phi_{xx} x_n^2 + 2\Phi_{xy} x_n y_n + \Phi_{yy} y_n^2) - \frac{\nu}{E}(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) - \frac{1}{2} w_s^2.$$

---

[2]) Vgl. z. B. Biezeno-Grammel: Technische Dynamik, S. 99—100 Berlin, 1939.

[3]) Vorgeschriebene Randverschiebungen in den einschlägigen Untersuchungen von K. Marguerre, vgl. insbesondere K. Marguerre und A. Kromm: Verhalten eines von Schub- und Druckkräften beanspruchten Plattenstreifens oberhalb der Beulgrenze. Luftf.-Forschg. Bd. 14, S. 627—639 (1937) und die dort angeführte Literatur.

Bezeichnet $\varkappa$ die Krümmung der Randkurve, also

$$x_{ss} = -\varkappa x_n = +\varkappa y_s, \quad y_{ss} = -\varkappa y_n = \varkappa x_s,$$

so wird

$$\Phi_{ss} = -(\Phi_{xx} x_n^2 + 2\Phi_{xy} x_n y_n + \Phi_{yy} y_n^2) + \Delta\Phi - \varkappa \Phi_n,$$

also

$$\frac{1}{2} w_s^2 + u_s x_s + v_s y_s = \frac{1}{E} \Delta\Phi - \frac{1+\nu}{E} (\Phi_{ss} + \varkappa \Phi_n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Das ist eine erste Beziehung, der Φ und w genügen müssen, wenn u, v auf dem Rande vorgeschrieben sind.

Weiter wird

$$\begin{aligned} u_s x_n + v_s y_n &= u_x x_s x_n + u_y y_s x_n + v_x x_s y_n + v_y y_s y_n \\ &= -u_x y_s y_n + (u_y + v_x) \frac{x_n y_s + y_n x_s}{2} - v_y x_s x_n + \frac{1}{2}(u_y - v_x) \\ &= -\frac{1+\nu}{E} (\Phi_{xx} x_n x_s + \Phi_{xy} (x_n y_s + x_s y_n) + \Phi_{yy} y_n y_s) \\ &\quad - \frac{1}{2} (w_x^2 x_s y_s + w_x w_y (y_s^2 - x_s^2) - w_y^2 x_s y_s) + \frac{1}{2} (u_y - v_x). \end{aligned}$$

Es ist

$$(\Phi_n)_s = (\Phi_x x_n + \Phi_y y_n)_s = \Phi_{xx} x_n x_s + \Phi_{xy} (x_n y_s + x_s y_n) + \Phi_{xy} y_n y_s + \Phi_x y_{ss} - \Phi_y x_{ss}$$

und daher

$$\Phi_{xx} x_n x_s + \Phi_{xy} (x_n y_s + x_s y_n) + \Phi_{yy} y_n y_s = (\Phi_n)_s - \varkappa \Phi_s.$$

Also

$$u_s x_n + v_s y_n = -\frac{1+\nu}{E} ((\Phi_n)_s - \varkappa \Phi_s) - \frac{1}{2} (w_x^2 x_s y_s + w_x w_y (y_s^2 - x_s^2) - w_y^2 x_s y_s) + \frac{1}{2} (u_y - v_x).$$

Liegt für $s = s_i$ eine Ecke vor, so ist jedenfalls

$$(u_s x_n + v_s y_n)\Big|_{s=s_i-0}^{s=s_i+0} = -\frac{1+\nu}{E} ((\Phi_n)_s - \varkappa \Phi_s)\Big|_{s=s_i-0}^{s=s_i+0} - \frac{1}{2} (w_n w_s)\Big|_{s=s_i-0}^{s=s_i+0} \quad \ldots \quad (4)$$

eine zweite Bedingung für Φ, w auf dem Rande. Eine dritte ergibt sich durch Differentiation der vorletzten Formelzeile nach der Bogenlänge:

$$\begin{aligned} (u_s x_n + v_s y_n)_s = &-\frac{1+\nu}{E} ((\Phi_n)_{ss} - (\varkappa \Phi_s)_s) \\ &+ \frac{1}{2} (u_{xy} x_s + u_{yy} y_s - v_{xx} x_s - v_{xy} y_s) \\ &- \frac{1}{2} w_{xx} [2 w_x x_s^2 y_s + w_y (x_s y_s^2 - x_s^3)] - \frac{1}{2} w_{xy} [2 w_x x_s y_s^2 + w_y (y_s^3 - x_s^2 y_s) + \\ &\qquad + w_x (x_s y_s^2 - x_s^3) - 2 w_y x_s^2 y_s] \\ &- \frac{1}{2} v_{yy} [w_x (y_s^3 - x_s^2 y_s) - 2 w_y x_s y_s^2] \\ &- \frac{1}{2} [w_x^2 (x_{ss} y_s + x_s y_{ss}) + 2 w_x w_y (y_s y_{ss} - x_s x_{ss}) - w_y^2 (x_{ss} y_s + x_s y_{ss})] \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite lassen sich die Ableitungen von u, v wegen (2) herausschaffen:

$$\begin{aligned} (u_s x_n + v_s y_n)_s = &-\frac{1+\nu}{E} ((\Phi_n)_s - \varkappa \Phi_s)_s + \frac{1}{2E} (\Phi_{yyy} x_s - 2\Phi_{xyy} y_s - \Phi_{xxx} y_s + 2\Phi_{xxy} x_s + \\ &\qquad + \Phi_{yyy} x_s - \Phi_{xxx} y_s) \\ &\qquad + \frac{\nu}{2E} (-\Phi_{xxy} x_s - 2\Phi_{xyy} y_s + \Phi_{yyx} y_s \\ &\qquad\qquad + 2\Phi_{xxy} x_s - \Phi_{xxy} x_s + \Phi_{yyx} y_s) \\ &+ w_{xx} \left[-w_x x_s^2 y_s - w_y \frac{x_s y_s^2 - x_s^3}{2} + w_y \frac{x_s}{2} \right] \\ &+ w_{xy} \left[w_x \left(-x_s y_s^2 - \frac{x_s y_s^2 - x_s^3}{2} \right) + w_y \frac{x_s^2 y_s - y_s^3}{2} - \frac{1}{2} w_x x_s + \frac{1}{2} w_y y_s \right] \\ &+ w_{yy} \left[w_x \frac{x_s^2 y_s - y_s^3}{2} + w_y x_s y_s^2 - \frac{1}{2} w_x y_s \right] \\ &- \frac{\varkappa}{2} [w_x^2 (x_s^2 - y_s^2) + 4 w_x w_y x_s y_s + w_y^2 (y_s^2 - x_s^2)] \end{aligned}$$

Man erhält so

$$(u_s x_n + v_s y_n)_s = -\frac{1+\nu}{E}((\Phi_n)_s - \varkappa\Phi_s)_s - \frac{1}{E}(\varDelta\Phi)_n$$
$$+ w_{xx} x_s^2[-w_x y_s + w_y x_s] + 2 w_{xy} x_s y_s[-w_x y_s + w_y x_s] + w_{yy} y_s^2[-w_x y_s + w_y x_s]$$
$$-\frac{\varkappa}{2}[w_x^2(2x_s^2-1) + 4 w_x w_y x_s y_s + w_y^2(2y_s^2-1)]$$
$$= -\frac{1+\nu}{E}((\Phi_n)_s - \varkappa\Phi_s)_s - \frac{1}{E}(\varDelta\Phi)_n - w_n(w_{xx}x_s^2 + 2w_{xy}x_s y_s + w_{yy}y_s^2) -$$
$$-\varkappa w_s^2 + \frac{\varkappa}{2}(w_x^2 + w_y^2)$$
$$= -\frac{1+\nu}{E}((\Phi_n)_s - \varkappa\Phi_s)_s - \frac{1}{E}(\varDelta\Phi)_n - w_n(w_{ss} + \varkappa w_n) + \varkappa(w_n^2 - w_s^2).$$

Also schließlich

$$(u_s x_n + v_s y_n)_s = -\frac{1+\nu}{E}((\Phi_n)_s - \varkappa\Phi_s)_s - \frac{1}{E}(\varDelta\Phi)_n - w_n w_{ss} - \frac{\varkappa}{2}(w_n^2 + w_s^2) \quad \ldots \ldots (5)$$

Damit ist gezeigt: vier Funktionen u, v, Φ, w, die den Gl. (2) genügen, erfüllen auf dem Rande die Gl. (3), (4), (5).

3. Wir wollen nun umgekehrt zeigen: es seien $w(x,y)$ und $\Phi(x,y)$ zwei Funktionen, welche auf dem Rande denjenigen Gleichungen genügen, die aus (3), (4), (5) entstehen, indem man auf der linken Seite $u = \tilde{u}$, $v = \tilde{v}$ einsetzt, unter $\tilde{u} = \tilde{u}(s)$, $\tilde{v} = \tilde{v}(s)$ gegebene Funktionen von s verstanden. Zu $w(x,y)$, $\Phi(x,y)$ gebe es $u(x,y)$, $v(x,y)$, so daß diese vier Funktionen ein Lösungssystem von (2) bilden. (Wenn Φ, w der ersten der beiden Gl. (1) genügen, dann gibt es immer solche $u(x,y)$, $v(x,y)$). Behauptet wird: es gibt drei Konstante c_0, c_1, c_2 derart, daß erstens die vier Funktionen $u(x,y) + c_0 y + c_1$, $v(x,y) - c_0 x + c_2$, $\Phi(x,y)$, $w(x,y)$ wieder dem System (2) genügen und daß zweitens längs des Randes $u(x,y) + c_0 y + c_1 = \tilde{u}$, $v(x,y) - c_0 x + c_2 = \tilde{v}$ wird. Der erste Teil der Behauptung ist selbstverständlich. Um den zweiten Teil einzusehen, bedenke man, daß die Gl. (3), (4), (5) sowohl gelten, wenn man auf der linken Seite u, v als auch, wenn man dort $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ einsetzt. Nach (5) also $((\tilde{u}_s - u_s)x_n + (\tilde{v}_s - v_s)y_n)_s = 0$. Da nach (4) der Ausdruck $(\tilde{u}_s - u_s)x + (\tilde{v}_s - v_s)y_n$ auch in den Ecken stetig ist, gibt es eine Konstante c_0, so daß $(\tilde{u}_s - u_s)x_n + (\tilde{v}_s - v_n)y_n = c_0$ längs des ganzen Randes. Wegen (3) wird $(\tilde{u}_s - u_s)x_s + (\tilde{v}_s - v_s)y_s = 0$, also $\tilde{u} - u_s = k y_s$, $\tilde{v}_s - v_s = -k x_s$, wobei $k = c_0$ sein muß. Daraus $\tilde{u} - u = c_0 y + c_1$, $\tilde{v} - v = -c_0 x + c_2$ wie behauptet.

Die Gleichungen, die wir für Φ, w hergeleitet haben, insbesondere (3), (4), (5) und die ursprünglichen Gl. (1) bleiben alle bestehen, wenn man zu Φ eine beliebige lineare Funktion hinzufügt. Deshalb darf man für Φ zusätzlich fordern

$$\iint_K \Phi_x\,dx\,dy = 0 \qquad \iint_K \Phi_y\,dx\,dy = 0 \qquad \iint_K \Phi\,dx\,dy = 0 \quad \ldots (6)$$

4. Zusammenfassend können wir sagen: Bei gegebenen Randverschiebungen sind die von Kármánschen Gl. (1) durch die beiden folgenden Gruppen von Randbedingungen zu ergänzen:

Erste Gruppe, Randbedingungen für w: entweder $w = 0$, $w_n = 0$ (eingespannte Platte) oder $w = 0$, $\varDelta w - (1-\nu)(w_{ss} + \varkappa w_n) = 0$ (momentfrei gelagerte Platte) oder sonst ein Satz von Randbedingungen, wie er aus der Plattentheorie geläufig ist.

Zweite Gruppe, Randbedingungen für Φ und w:

$$-\frac{1+\nu}{E}((\Phi_n)_s - \varkappa\Phi_s)_s - \frac{1}{E}(\varDelta\Phi)_n = w_n w_{ss} + \frac{\varkappa}{2}(w_n^2 + w_s^2) + (u_s x_n + v_s y_n)_s \quad \ldots \ldots (7)$$

$$\frac{1}{E}\varDelta\Phi - \frac{1+\nu}{E}(\Phi_{ss} + \varkappa\Phi_n) = \frac{1}{2}w_s^2 + u_s x_s + v_s y_s \quad \ldots \ldots \ldots (8)$$

und in den Ecken $s = s_i$:

$$-\frac{1+\nu}{E}((\Phi_n)_s - \varkappa\Phi_s)\Big|_{s=s_i-0}^{s=s_i+0} = \left(\frac{1}{2}w_n w_s + u_s x_n + v_s y_n\right)\Big|_{s=s_i-0}^{s=s_i+0} \quad \ldots \ldots (9)$$

Außer diesen beiden Gruppen von Randbedingungen verlangen wir für Φ zur Normierung noch die Gl. (6).

Setzt man $\frac{\Phi}{Eh} = \varphi$ (h Dicke der Platte), so genügt $\varphi = \varphi(x,y)$ folgenden Gleichungen.

Im Innern:

$$\Delta\Delta\varphi = \frac{p(x,y)}{N}, \quad p(x,y) = \frac{N}{h}(w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy}), \quad N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

Auf dem Rande:

$$-(\Delta\varphi)_n - (1+\nu)\,((\varphi_n)_s - \varkappa\varphi_s)_s = \frac{P(s)}{N}, \quad P(s) = \frac{N}{h}\left(w_n w_{ss} + \frac{\varkappa}{2}(w_n^2 + w_s^2) + u_s x_n + v_s y_n)_s\right),$$

$$\Delta\varphi - (1+\nu)\,(\varphi_{ss} + \varkappa\varphi_n) = \frac{M(s)}{N}, \quad M(s) = \frac{N}{h}\left(\frac{1}{2}w_s^2 + u_s x_s + v_s y_s\right),$$

$$-(1+\nu)\,((\varphi_n)_s - \varkappa\varphi_s)_{s=s_i-0}^{s=s_i+0} = \frac{P_i}{N}, \quad P_i = \frac{N}{h}\left(\frac{1}{2}w_n w_s + u_s x_n + v_s y_n\right)_{s=s_i-0}^{s=s_i+0},$$

schließlich den Normierungsgleichungen:

$$\iint_K \varphi_x\,dx\,dy = 0 \qquad \iint_K \varphi_y\,dx\,dy = 0 \qquad \iint_K \varphi\,dx\,dy = 0 .$$

Man kann also das Gleichnis aussprechen: $\frac{\Phi}{Eh} = \varphi$ ist die Durchbiegung einer fingierten Platte, die der Querbelastung $p(x, y)$, der Randkraft $P(s)$, dem Randmoment $M(s)$ und den Eckenkräften P_i ausgesetzt ist (und die im unbelasteten Zustand mit der gegebenen Platte geometrisch zusammenfällt). Elastizitätsmodul E und Dicke h sind für beide Platten gleich, hingegen ist die Poissonsche Konstante der fingierten Platte gleich dem Negativen der Poissonschen Konstanten der gegebenen Platte[4]). Aus diesem Gleichnis ergibt sich, daß φ und damit auch Φ bei *gegebenem* $w(x, y)$ durch die gestellten Bedingungen eindeutig bestimmt ist. In der Tat benötigt der Eindeutigkeitssatz der Plattentheorie nicht, daß die Poissonsche Konstante positiv sei, es genügt, daß sie zwischen —1 und +1 liegt; das ist aber bei der Gleichnisplatte der Fall.

Die Randbedingungen für die linearisierte Theorie ergeben sich, indem man die (in w) quadratischen Glieder streicht. Es wird dann φ eine Bipotentialfunktion und in die Randbedingungen für φ geht w nicht mehr ein. Das Gleichnis behält auch für die linearisierte Theorie seine Bedeutung und ist in diesem Falle ein Gleichnis für die Airysche Spannungsfunktion des ebenen Spannungszustandes bei vorgeschriebenen Randverschiebungen.

In zwei praktisch wichtigen Fällen heben sich auch in der nichtlinearisierten Theorie die in w quadratischen Glieder aus den Randbedingungen heraus. Nämlich bei der eingespannten Platte mit beliebigem Rand ($w = 0$, $w_n = 0$) und bei der freigelagerten Platte mit geradlinigem Rand ($w = 0$, $\varkappa = 0$). In diesen beiden Sonderfällen sind also wohl die beiden Differentialgleichungen (1) für Φ und w nichtlinear, die zugehörigen Randbedingungen aber sind linear.

Die Grundgleichungen für elastische Platten veränderlicher Dicke und großer Ausbiegung.

Von *Karl Federhofer* in Graz.

Die erstmals von Th. v. Kármán[1]) entwickelten Grundgleichungen für elastische Platten mit großer Ausbiegung gelten für gleichbleibende Plattendicke; es sind dies bei beliebigem Plattenumriß zwei partielle nichtlineare Differentialgleichungen 4. Ordnung, die bisher nur im Sonderfalle einer am Rande eingeklemmten Kreisplatte von St. Way[2]) und für die am Rande drehbar gelagerte Kreisplatte vom Verfasser[3]) mit Hilfe von Reihenentwicklungen integriert worden sind. Im folgenden sollen diese Grundgleichungen unter der Annahme einer beliebig veränderlichen Plattendicke aufgestellt werden. Die dabei gegenüber dem Falle gleichbleibender Plattendicke entstehenden zusätzlichen Teile in beiden Gleichungen weisen eine bemerkenswerte formale Übereinstimmung auf.

1. Die Grundgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten. Bezeichnen u, v die Verschiebungen eines Punktes der Mittelfläche der Platte in den Richtungen eines in der an-

[4]) Alle diese Behauptungen liest man direkt ab von den angegebenen Randbedingungen für φ, indem man sie vergleicht mit den Randbedingungen der gewöhnlichen Platte, vgl. z. B. Fr. A. Willers: Die erste Variation der Formänderungsarbeit ausgebeulter ebener Platten. Z. angew. Math. Mech. Bd. 20, S. 118—121, insbesondere Formel Ia und IIa, S. 120.

[1]) Enz. d. Math. Wiss., Bd. 4 (1907—1914), Heft 27, S. 350.

[2]) St. Way: Trans. Amer. Soc. mech. Engr., Bd. 56 (1934), S. 627.

[3]) K. Federhofer: Luftf.-Forschg., Bd. 21 (1944), S. 1.

fänglich ebenen Mittelfläche gewählten xy-System und $w(xy)$ die Durchbiegung der Platte an dieser Stelle, so erfährt ein Element $dx\,dy$ der Mittelebene die Dehnungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

und eine Winkeländerung

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

wobei die von der großen Ausbiegung w herrührenden Anteile zweiter Ordnung berücksichtigt sind, während die in u und v quadratischen Glieder vernachlässigt wurden. Für die diesen Größen entsprechenden, über die Plattendicke gleichmäßig verteilten Spannungen in der Mittelfläche, die wir zweckmäßig zu den auf die Dicke h der Platte bezogenen Spannungskräften $T_x = h\sigma_x$, $T_y = h\sigma_y$, $S = h\tau_{xy}$ zusammenfassen und kurz als Membrankräfte oder — weil sie durch die Wölbung der Platte hervorgerufen werden — als Gewölbespannungen bezeichnen wollen, gilt nach dem Hookeschen Gesetze

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\,\varepsilon_y) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\,\varepsilon_x) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

mit μ als Querzahl des Plattenstoffes, E und G als Elastizitätsmodul für Zug und für Schub, wobei $E = 2G(1+\mu)$.

Da nach Voraussetzung die Durchbiegungen w gegen x und y kleine Größen sind, so gelten für die genannten Spannungsresultanten die Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Spannungszustandes

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

die durch Einführung einer Spannungsfunktion $F(xy)$ gemäß

$$T_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad T_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

erfüllt werden. Um die Differentialgleichung, der F zu genügen hat, zu finden, beseitigen wir die Verschiebungen u, v aus den Gl. (1—3), indem wir bilden

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

und hierin die $\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \gamma_{xy}$ durch die Spannungsresultanten mit Hilfe der aus (4—6) folgenden Beziehungen

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh}(T_x - \mu\,T_y) \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{Eh}(T_y - \mu\,T_x) \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{Gh}S \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

ausdrücken. Dabei wollen wir die Plattendicke h als mit x und y veränderlich voraussetzen. Das erfordert zwar eine etwas langwierige Rechnung, die aber zu einem recht einfachen Ergebnis führt. Setzen wir vorübergehend $1/h = g$, so liefert die Gl. (9) bei Beachtung der Gl. (10—12) und (8) zunächst

$$\begin{aligned}\frac{1}{E}[w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy}] &= g\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}(F_{yy} - \mu F_{xx}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F_{xx} - \mu F_{yy}) + 2(1+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{xy}\right] \\ &+ 2\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(F_{yy} - \mu F_{xx}) + 2\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(F_{xx} - \mu F_{yy}) + 2(1+\mu)\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}F_{xy} \\ &+ 2(1+\mu)\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}F_{xy} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(F_{xx} - \mu F_{yy}) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(F_{yy} - \mu F_{xx}) + 2(1+\mu)\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}F_{xy},\end{aligned}$$

worin die beigefügten Zeiger Ableitungen nach x oder y andeuten. Mit Einführung des Laplaceschen Operators $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ und Ausnutzung der Beziehung

$$\Delta (g \Delta F) = g \Delta \Delta F + \Delta g \Delta F + 2\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\Delta F + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\Delta F\right)$$

gelingt es nach einigen Umformungen, die vorstehende Gleichung auf die einfache Form zu bringen

$$\Delta\left(\frac{1}{h}\Delta F\right) + (1+\mu)\left[2\left(\frac{1}{h}\right)_{xy} F_{xy} - \left(\frac{1}{h}\right)_{yy} F_{xx} - \left(\frac{1}{h}\right)_{xx} F_{yy}\right] = E\left[w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy}\right] \quad (13),$$

womit die erste Grundgleichung in allgemeinster Form entwickelt ist. Für konstante Plattendicke h vereinfacht sie sich in die schon bekannte, erstmals von A. Föppl[4]) abgeleitete erste Grundgleichung

$$\Delta \Delta F = E h \left(w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy}\right) \quad (13a).$$

Als zweite Grundgleichung für die Funktionen F und w tritt hinzu die Biegungsgleichung der in ihrer Mittelebene gespannten und durch eine Querbelastung p (je Flächeneinheit) belasteten Platte, die bei veränderlicher Dicke lautet

$$\Delta (D \Delta w) + (1-\mu)\left[2 D_{xy} w_{xy} - D_{yy} w_{xx} - D_{xx} w_{yy}\right] =$$
$$p + \left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{yy} w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{xx} w_y) - \frac{\partial}{\partial x}(F_{xy} w_y) - \frac{\partial}{\partial y}(F_{xy} w_x)\right] \quad (14),$$

wobei $D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$ die veränderliche Plattensteifigkeit bedeutet und der in eckige Klammern gesetzte Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen jene zusätzliche Belastung der Platte angibt, die von den Spannungsresultanten in der Mittelfläche infolge der durch die Plattenbiegung verursachten Schiefstellung der Plattenelemente gegen die ursprünglich ebene Mittelfläche erzeugt wird[5]). Der links vom Gleichheitszeichen in eckigen Klammern stehende Ausdruck läßt erkennen, daß bei seiner Herleitung die Plattensteifigkeit D als veränderlich vorausgesetzt wurde[6]). Der in eckigen Klammern rechts vom Gleichheitszeichen stehende Ausdruck vereinfacht sich nach Ausführung der Differentiationen und Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen (7) zu $F_{xx} w_{yy} + F_{yy} w_{xx} - 2 F_{xy} w_{xy}$, so daß die Grundgleichung (14) im Falle konstanter Steifigkeit übergeht in[7])

$$D \Delta \Delta w = p + (F_{xx} w_{yy} - 2 F_{xy} w_{xy} + F_{yy} w_{xx}) \quad (14a)$$

Bemerkenswert ist in den allgemeinen Grundgleichungen (13) und (14) die nahezu vollkommene formale Übereinstimmung der linken Gleichungsseiten, die ineinander übergehen, wenn $1/h$ durch D, F durch w und $+\mu$ durch $-\mu$ ersetzt wird.

Mit der durch Integration der beiden allgemeinen Grundgleichungen gewonnenen Kenntnis von F und w sind die Formänderungen und Spannungen in solchen Platten mit großer Ausbiegung bestimmt. Die dem Biegungszustand entsprechenden, mit dem Abstande von der Mittelfläche linear anwachsenden Spannungen lassen sich in bekannter Weise zusammenfassen zu den Biegungsmomenten

$$G_x = -D(w_{xx} + \mu w_{yy}) \quad (15)$$

$$G_y = -D(w_{yy} + \mu w_{xx}) \quad (16)$$

bzw. zu einem Scherungsmoment

$$G_{xy} = -(1-\mu) D w_{xy} \quad (17)$$

und zu den Querkäften

$$N_x = \frac{\partial}{\partial x}[D \Delta w] - (1-\mu)\left[D_x w_{yy} - D_y w_{xy}\right] \quad (18)$$

$$N_y = \frac{\partial}{\partial y}[D \Delta w] - (1-\mu)\left[D_y w_{xx} - D_x w_{xy}\right] \quad (19)$$

Als Grenzfälle enthalten die beiden Grundgleichungen (13) und (14) mit $F=0$ den Fall der biegungssteifen Platte mit kleiner Durchbiegung (Kirchhoffscher Fall) und mit $D=0$ den Fall der vollkommen biegsamen Platte (Membran).

---

[4]) A. Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. V, Verlag Teubner (1907), S. 139, Gl. 165.
[5]) Vgl. hierzu C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik, S. 584, Gl. (7), Berlin 1939, u. K. Federhofer u. H. Egger, Ing.-Arch. 14 (1943), S. 155.
[6]) Siehe H. Marcus: Theorie elastischer Gewebe, Bd. I, S. 94, 2. Aufl. Berlin 1932.
[7]) In dieser Form zuerst angegeben von Th. v. Kármán in Enz. d. Math. Wiss., Bd. 4 (1907—1914), H. 27, S. 350.

2. Die Grundgleichungen in Polarkoordinaten. Da sich bei den Kreis- und Kreisringplatten, die für die praktischen Anwendungen eine sehr große Bedeutung haben, die Verwendung von Polarkoordinaten (r,φ) empfiehlt, so wollen wir die Grundgleichungen (13) und (14) auf Polarkoordinaten umschreiben. Denken wir uns die X-Achse in die Richtung r, die Y-Achse in die dazu senkrechte Richtung s gelegt, wobei $ds = r d\varphi$ ist, und beachten, daß dann

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial r \partial s} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

wird, so lassen sich gemäß (8) die radiale und tangentiale Normalkraft T_r und T_φ sowie die Schubkraft S durch eine Spannungsfunktion $F(r,\varphi)$ in folgender Form darstellen

$$T_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}, \qquad T_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \qquad S = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \quad \ldots\ldots (20).$$

Hiermit lauten dann die Grundgleichungen (13) und (14), wenn der Kehrwert $1/h$ der Plattendicke zur Abkürzung mit g bezeichnet wird, in Polarkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} &\Delta(g\Delta F) + (1+\mu)\left[2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) - \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\right.\\ &\qquad \left. - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}\right)\right] = E\left[\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)\right\}^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad .\ . (13b)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta(D\Delta w) + (1-\mu)\left[2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial D}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) - \frac{\partial^2 D}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right.\\ &\qquad \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial D}{\partial r}\right)\right] = p(r,\varphi) + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(T_r r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(T_\varphi \frac{\partial w}{r\partial \varphi}\right)\right.\\ &\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial r}\left(S\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(S\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad .\ . (14b).$$

Diese Gleichungen sind erheblich verwickelter als die ihnen bei der Benutzung rechtwinkliger Koordinaten entsprechenden Gl. (13) und (14), sie erfahren aber eine wesentliche Vereinfachung in dem für die praktischen Anwendungen besonders wichtigen Falle einer rotationssymmetrischen Belastung und einer rotationssymmetrischen Veränderlichkeit der Dicke h; dann wird die Spannungsfläche zu einer Umdrehungsfläche, d. h. F wird unabhängig von φ, das gleiche gilt für die Größen $w, g = 1/h$ und D und es gelten unter diesen Voraussetzungen die vereinfachten Grundgleichungen

$$\Delta\left(\frac{1}{h}\Delta F\right) - (1+\mu)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{dF}{dr}\right] = -\frac{E}{2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 \quad \ldots\ldots (13c)$$

$$\Delta(D\Delta w) - (1-\mu)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{dD}{dr}\frac{dw}{dr}\right] = p(r) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{dF}{dr}\frac{dw}{dr}\right) \quad \ldots\ldots (14c).$$

Beachtet man, daß

$$\Delta(D\Delta w) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}(D\Delta w)\right]$$

und analog

$$\Delta\left(\frac{1}{h}\Delta F\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{h}\Delta F\right)\right]$$

ist, so folgt aus vorstehenden Gleichungen nach einmaliger Integration

$$r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{h}\Delta F\right) - (1+\mu)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{dF}{dr} = -\frac{E}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 + C_1 \quad \ldots\ldots (13d),$$

$$r\frac{d}{dr}(D\Delta w) - (1-\mu)\frac{dD}{dr}\frac{dw}{dr} = \int p r\, dr + \frac{dF}{dr}\frac{dw}{dr} + C_2 \quad \ldots\ldots (14d).$$

Um die mechanische Bedeutung der Integrationskonstanten C_2 festzustellen, beachten wir, daß im vorausgesetzten Falle der rotationssymmetrischen Belastung und ebensolcher Veränderlichkeit der Plattendicke h die in der Meridiannormalen wirkende Querkraft N gemäß den Gl. (18) und (19) gegeben ist durch

$$N = \frac{d}{dr}[D\Delta w] - (1-\mu)\frac{dD}{dr}\frac{1}{r}\frac{dw}{dr},$$

womit sich die Gl. (14d) wegen $T_r = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}$ umformen läßt in $r\left(N - T_r\frac{dw}{dr}\right) = \int p r\, dr + C_2$;

diese Gleichung drückt für die Richtung der Rotationsachse das Gleichgewicht der Kräfte aus, die an einem aus der Platte herausgeschnittenen Ringe angreifen.

Bei gleichförmigem Drucke p ist daher im Falle einer Vollscheibe die Konstante C_2 gleich Null, während sie z. B. bei der Ringplatte mit kräftefreiem Innenrand $r=r_i$ den Wert $-\frac{pr_i^2}{2}$ erhält.

Die Integrationskonstante C_1 ist im Falle der Rotationssymmetrie gleich Null zu setzen, wie die folgende unmittelbare Herleitung der Gl. (13d) zeigt.

Die elastische Fläche ist eine Umdrehungsfläche, deren Verzerrung durch die radiale Verschiebung $v(r)$ und die Neigung $\varphi(r)$ der Meridiantangente gegeben ist, wobei $-\frac{dw}{dr}=\operatorname{tg}\varphi$ ist. Dann gilt für die Dehnungen ε_r und ε_φ mit $\sin\varphi=u$

$$\varepsilon_r=\frac{dv}{dr}+\frac{u^2}{2}, \quad \varepsilon_\varphi=\frac{v}{r},$$

woraus sich zufolge $T_r=\frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_r+\mu\varepsilon_\varphi)$ $T_\varphi=\frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_\varphi+\mu\varepsilon_r)$ die Werte

$\frac{v}{r}=\frac{1}{E}\frac{T_\varphi-\mu T_r}{h}$ und $\frac{dv}{dr}=-\frac{u^2}{2}+\frac{1}{E}\frac{T_r-\mu T_\varphi}{h}$ ergeben; hiermit folgt

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{h}(T_\varphi-\mu T_r)\right]-\frac{1}{h}(T_r-\mu T_\varphi)=-\frac{E}{2}u^2.$$

Diese Gleichung läßt sich aber mit Verwertung der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d}{dr}(rT_r)-T_\varphi=0$$

umformen in
$$r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{h}(T_r+T_\varphi)\right]-(1+\mu)rT_r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{h}\right)=-\frac{E}{2}u^2.$$

Nun ist
$$T_r=\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}, \quad T_\varphi=\frac{d^2F}{dr^2},$$

womit sich unmittelbar ergibt

$$r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{h}\Delta F\right]-(1+\mu)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{dF}{dr}=-\frac{E}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2$$

übereinstimmend mit Gl. (13d), wenn dort $C_1=0$ gesetzt wird.

Eine Verallgemeinerung der Formel von Pollaczek-Geiringer und ihre Anwendung auf die Verteilungsfunktion der Hagelschäden.

Von *Rolf Lüders* in Berlin.

Die Formeln der Wahrscheinlichkeitsansteckung bei kleinen Wahrscheinlichkeiten, insbesondere die Formeln von Eggenberger und Pollaczek-Geiringer, sind mit Erfolg zur Berechnung von statistischen Verteilungsfunktionen benutzt worden[1]). So konnte die Verteilungskurve der Hagelschäden unter Verwendung dieser Formeln berechnet werden. Dabei wurde angenommen, daß die Schadenswahrscheinlichkeiten konstant sind und sich von Jahr zu Jahr nicht ändern. Wie aber die Statistik der Hagelschäden zeigt, ist diese Annahme nicht zutreffend. Es wird nämlich ein periodischer Schadensverlauf beobachtet, wenn auch infolge der starken Zufallsschwankungen die Periodizität nicht immer deutlich zu erkennen ist. Die bekannten Methoden der Periodenanalyse lassen eine Periode von 10 bis 11 Jahren entsprechend der Sonnenfleckenperiode erkennen[2]).

Im folgenden soll nun eine Formel hergeleitet werden, die die durch die Periodizität verursachte Inhomogenität im Schadensverlauf berücksichtigt. An einem Beispiel soll dann gezeigt werden, wie sich eine Periodizität auf Grund der Periodogramm-Methode feststellen läßt und sich auf die Verteilungskurve der Schäden auswirkt.

[1]) Riebesell: Einführung in die Sachversicherungs-Mathematik. Berlin 1936, S. 48.

[2]) Vgl. Myslivec: Periodische Schwankungen der Schadensquotienten in der Hagelversicherung. Oesterreichische Revue, 60. Jg. (1935), S. 379 u. 389; Beitrag zur Theorie der Hagelversicherung. Blätter für Versicherungsmathematik, 3. Bd. (1936), S. 424.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine bestimmte Anzahl von Ereignissen in der Zeiteinheit auftritt, dient bekanntlich die Poissonsche Formel, wenn die mittlere Anzahl der Ereignisse je Zeiteinheit nur gering ist.

Nach dieser Formel ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau r Ereignisse in der Zeiteinheit auftreten,

$$P_r = e^{-m} \cdot \frac{m^r}{r!} \quad \ldots \ldots (1),$$

wo m die durchschnittliche Anzahl der Ereignisse in der Zeiteinheit ist. Diese Formel läßt sich z. B. auf die Statistik von Krankheiten anwenden. Ist m die durchschnittliche Anzahl von Fällen einer bestimmten Krankheit je Monat, so ist P_r die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem Monat genau r Krankheitsfälle beobachtet werden. Voraussetzung für die Gültigkeit der Poissonschen Formel ist aber, daß die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Ereignisse voneinander unabhängig sind, daß also keine Wahrscheinlichkeitsansteckung besteht.

Soll auch die Wahrscheinlichkeitsansteckung berücksichtigt werden, so ist die Formel von Pollaczek-Geiringer anzuwenden[3][4]. Ein Spezialfall dieser Formel ist bereits 1923 von Eggenberger aus dem Urnenschema abgeleitet und auf die Statistik der ansteckenden Krankheiten angewandt worden[5]. Bei der Formel von Pollaczek-Geiringer wird angenommen, daß die Ereignisse entweder einzeln oder zu je zweien oder zu je dreien usw. auftreten können. Ferner wird angenommen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein einzelnes Ereignis bzw. ein Paar von Ereignissen usw. auftritt, von Zeiteinheit zu Zeiteinheit konstant ist, daß also Homogenität von Serie zu Serie besteht. Bezeichnet man die mittlere Anzahl je Zeiteinheit der einzeln auftretenden Ereignisse mit h_1, die der zu je zweien auftretenden Ereignisse mit $2h_2$ und allgemein die mittlere Anzahl der zu je n auftretenden Ereignisse mit nh_n, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Zeiteinheit genau r Ereignisse beobachtet werden,

$$\left.\begin{aligned} P_r &= \sum_{\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\ldots\ldots=r} \left(e^{-h_1}\cdot\frac{h_1^{\nu_1}}{\nu_1!}\right)\cdot\left(e^{-h_2}\cdot\frac{h_2^{\nu_2}}{\nu_2!}\right)\cdot\left(e^{-h_3}\cdot\frac{h_3^{\nu_3}}{\nu_3!}\right)\ldots \\ P_r &= e^{-h_1-h_2-h_3-\ldots\ldots} \sum_{\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\ldots=r} \frac{h_1^{\nu_1}}{\nu_1!}\cdot\frac{h_2^{\nu_2}}{\nu_2!}\cdot\frac{h_3^{\nu_3}}{\nu_3!}\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2).$$

Die mittlere Anzahl der Ereignisse in der Zeiteinheit ist

$$m = h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \ldots\ldots .$$

Für die Praxis ist die obige Formel nicht ohne weiteres brauchbar, weil die $h_1, h_2, h_3, \ldots$ meistens nicht unmittelbar beobachtet werden können sondern aus der Häufigkeitsverteilung berechnet werden müssen. Das ist aber nicht möglich, weil es sich hier um unendlich viele Parameter handelt. Es ist daher zweckmäßig, die Formel zu spezialisieren, etwa dadurch, daß man die h_i in einer bestimmten Progression abnehmen läßt, z. B.

$$h_2 = \frac{p}{2},\quad h_3 = \frac{pq}{3},\quad h_4 = \frac{pq^2}{4}, \ldots\ldots,\quad h_n = \frac{pq^{n-2}}{n}, \ldots \quad \ldots (3).$$

Nun ist aber in vielen Fällen die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses nicht zeitlich konstant sondern ist mehr oder weniger starken Schwankungen unterworfen. Bei den meisten Krankheiten schwankt z. B. die mittlere Zahl der Krankheitsfälle mit der Jahreszeit; ferner wird vielfach bei Beobachtung eines längeren Zeitraums eine Abnahme der Wahrscheinlichkeit im Laufe der Jahre festgestellt. Die Formel von Pollaczek-Geiringer ist nun so zu verallgemeinern, daß sie auch auf die Statistik von Ereignissen mit zeitlich veränderlichen Wahrscheinlichkeiten (Inhomogenität von Serie zu Serie) angewandt werden kann. Zu diesem Zwecke sei angenommen, daß ein Zeitabschnitt in n Teilabschnitte zerlegt werden kann und in dem k-ten Teilabschnitt ähnlich wie in Formel (2) die mittlere Anzahl der einzeln auftretenden Ereignisse $h_1^{(k)}$, die mittlere Anzahl der zu je zweien auftretenden Ereignisse $2h_2^{(k)}$ und allgemein die mittlere Anzahl der zu je n auftretenden Ereignisse $n \cdot h_n^{(k)}$ ist. Dann ist nach Gl. (2) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in dem k-ten Teilabschnitt genau r Ereignisse beobachtet werden,

$$P_r^{(k)} = e^{-h_1^{(k)}-h_2^{(k)}-\ldots} \sum_{\nu_1+2\nu_2+\ldots=r} \frac{h_1^{(k)\,\nu_1}}{\nu_1!}\cdot\frac{h_2^{(k)\,\nu_2}}{\nu_2!}\ldots \quad \ldots (4).$$

---

[3]) Pollaczek-Geiringer: Z. angew. Math. Mech. 8 (1928), S. 292.

[4]) Lüders: Die Statistik der seltenen Ereignisse. Biometrika 26 (1934), S. 108.

[5]) Eggenberger und Polya: Über die Statistik verketteter Vorgänge. Z. angew. Math. Mech. 3 (1923), S. 279; Eggenberger: Die Wahrscheinlichkeitsansteckung. Bern 1924.

Für einen längeren Zeitabschnitt ist dann die relative Häufigkeit der Teilabschnitte mit genau r Ereignissen

$$P_r = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_r^{(k)} \quad \ldots \ldots (5).$$

Die mittlere Anzahl der Ereignisse je Zeiteinheit ist dabei

$$m = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m^{(k)} ,$$

wo

$$m^{(k)} = h_1^{(k)} + 2 h_2^{(k)} + 3 h_3^{(k)} + \ldots \quad \ldots \ldots (6)$$

der entsprechende Mittelwert für den k-ten Teilabschnitt ist.

Die Formeln (4) und (5) lassen sich im Prinzip ebenso anwenden wie die Formel (2), die für den zeitlich homogenen Ereignisverlauf aufgestellt war. Es möge sich z. B. darum handeln, die Verteilungskurve für die monatlichen Erkrankungsfälle einer bestimmten ansteckenden Krankheit, für die ein Beobachtungszeitraum von 10 Jahren vorliegt, zu bestimmen. Dabei sollen starke jahreszeitliche Schwankungen auftreten, während von Jahr zu Jahr die Wahrscheinlichkeiten sich nicht ändern. Man hätte dann aus der beobachteten Häufigkeitsverteilung der Januar-Krankheitsfälle die $h_i^{(0)}$, aus der Februar-Verteilung die $h_i^{(1)}$ usw., aus der Dezember-Verteilung die $h_i^{(11)}$ zu bestimmen und hieraus die $P_r^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 11)$ und P_r zu berechnen. Diese Methode führt aber meistens nicht zum Ziel, da die Anzahl der beobachteten Werte (in dem erwähnten Beispiel für jeden Monat nur 10) zu gering ist, um aus der beobachteten Verteilung die Parameter der theoretischen Verteilung mit genügender Genauigkeit zu bestimmen.

Es muß also ein Weg gefunden werden, der die Berechnung der Parameter aus dem Gesamtmaterial, bei dem sich die zufälligen Schwankungen besser ausgleichen, ermöglicht. Dabei müssen über die $h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, \ldots$ bestimmte Voraussetzungen gemacht werden. Es sei daher angenommen, daß die $h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, \ldots$ dem Mittelwert $m^{(k)}$ proportional sind:

$$h_1^{(k)} = C_k \cdot \eta_1, \quad h_2^{(k)} = C_k \cdot \eta_2, \quad \ldots \ldots (7),$$

wobei $C_k = \frac{m^{(k)}}{m}$, also $m^{(k)} = C_k \cdot m$ ist.

Die Aufgabe besteht jetzt darin, aus der beobachteten Verteilung die $\eta_1, \eta_2, \ldots$ zu bestimmen. Dabei sollen entsprechend den Gl. (3) wieder die folgenden Annahmen gemacht werden:

$$\eta_2 = \frac{\beta}{2}, \quad \eta_3 = \frac{\beta\gamma}{3}, \quad \eta_4 = \frac{\beta\gamma^2}{4}, \quad \ldots\ldots, \quad \eta_n = \frac{\beta\gamma^{n-2}}{n}, \quad \ldots \ldots (7a).$$

Man könnte nun die η, β, γ mittels der ersten drei Momente berechnen. Da aber das Moment zweiter Ordnung und insbesondere das Moment dritter Ordnung mit großen mittleren Fehlern behaftet sind, soll auch hier die Methode der modifizierten Mittelwerte angewandt werden [vgl. [4])]. Zu diesem Zwecke sei die folgende erzeugende Funktion eingeführt

$$f(x, z) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r z^r = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} {}^{(k)}f(x, z) \quad \ldots \ldots (8).$$

Dabei ist

$${}^{(k)}f(x, z) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r^{(k)} x^r z^r = e^{-h_1^{(k)} - h_2^{(k)} - \ldots} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots = r} \frac{h_1^{(k)\nu_1} h_2^{(k)\nu_2} \ldots}{\nu_1! \nu_2! \ldots} x^r z^r$$
$$= e^{-h_1^{(k)} - h_2^{(k)} - \ldots + h_1^{(k)} xz + h_2^{(k)} x^2 z^2 + \ldots} \quad \ldots \ldots (9).$$

Hieraus erhält man unter Benutzung von (7)

$${}^{(k)}f(x, z) = e^{\{-\eta_1 - \eta_2 - \ldots + \eta_1 xz + \eta_2 x^2 z^2 + \ldots\} C_k} \quad \ldots \ldots (10).$$

Es ist mithin

$$f(x, z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\{-\eta_1 - \eta_2 - \ldots + \eta_1 xz + \eta_2 x^2 z^2 + \ldots\} C_k} \quad \ldots \ldots (11)$$

und

$$f(x, 1) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\{-\eta_1 - \eta_2 - \ldots + \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \ldots\} C_k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E(x)^{C_k} \quad \ldots \ldots (12),$$

wo

$$E(x) = e^{-\eta_1 - \eta_2 - \ldots + \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \ldots} \quad \ldots \ldots (13)$$

ist. Differenziert man die Funktion $f(x, z)$ nach z und setzt $z = 1$, so erhält man den Ausdruck

$$f'(x,1) = \left\{\frac{\partial}{\partial z} f(x,z)\right\}_{z=1} = \sum_{r=0}^{\infty} r P_r x^r \quad \text{(14).}$$

Andererseits erhält man aus (11)

$$f'(x,1) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\eta_1 x + 2\eta_2 x^2 + 3\eta_3 x^3 + \ldots) C_k E(x)^{C_k}$$

$$= \frac{1}{n} (\eta_1 x + 2\eta_2 x^2 + 3\eta_3 x^3 + \ldots) \sum_{k=0}^{n-1} C_k E(x)^{C_k};$$

es ist also

$$\eta_1 + 2\eta_2 x + 3\eta_3 x^2 + \ldots = \frac{1}{x} \cdot \frac{f'(x,1)}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_k E(x)^{C_k}} = \bar{a}(x) \quad \text{(15),}$$

wo die rechte Seite der Gleichung zur Abkürzung mit $\bar{a}(x)$ bezeichnet worden ist.

Aus den Gl. (7a) folgt

$$\eta_1 + 2\eta_2 x + 3\eta_3 x^2 + \ldots = \eta_1 + \beta x + \beta\gamma x^2 + \beta\gamma^2 x^3 + \ldots = \eta_1 + \frac{\beta x}{1 - \gamma x}.$$

Nimmt man drei verschiedene Werte für x, nämlich x_1, x_2 und x_3 an, so ergeben sich die Gleichungen

$$\eta_1 + \frac{\beta x_1}{1 - \gamma x_1} = \bar{a}(x_1) \quad \text{(16)}$$

$$\eta_1 + \frac{\beta x_2}{1 - \gamma x_2} = \bar{a}(x_2) \quad \text{(17)}$$

$$\eta_1 + \frac{\beta x_3}{1 - \gamma x_3} = \bar{a}(x_3) \quad \text{(18).}$$

Hieraus folgt

$$\frac{1 - \gamma x_3}{1 - \gamma x_1} = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_2} \cdot \frac{\bar{a}(x_1) - \bar{a}(x_2)}{\bar{a}(x_2) - \bar{a}(x_3)} \quad \text{(19)}$$

$$\beta = \frac{\bar{a}(x_1) - \bar{a}(x_2)}{x_1 - x_2} \cdot (1 - \gamma x_1)(1 - \gamma x_2) \quad \text{(20)}$$

$$\eta_1 = \bar{a}(x_1) - \frac{\beta x_1}{1 - \gamma x_1} \quad \text{(21).}$$

Aus diesen drei Gleichungen können die γ, β, η_1 leicht berechnet werden, falls die $\bar{a}(x_1)$, $\bar{a}(x_2)$ und $\bar{a}(x_3)$ bekannt sind. Nun gilt für $\bar{a}(x)$ — vgl. (15) —

$$\bar{a}(x) = \frac{1}{x} \frac{f'(x,1)}{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k E(x)^{C_k}} \quad \text{(22);}$$

dabei ist

$$f'(x,1) = \sum_{r=0}^{\infty} r P_r x^r$$

aus den beobachteten Werten der P_r leicht zu berechnen. Für $E(x)$ gilt die Gl. (12)

$$\sum_{k=0}^{n-1} E(x)^{C_k} = n \cdot f(x,1) \quad \text{(23),}$$

wo

$$f(x,1) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r$$

ebenfalls aus den beobachteten P_r leicht zu bestimmen ist. Der Ausdruck $E(x)$ ist eine Wurzel der algebraischen Gl. (23) und läßt sich mittels eines Näherungsverfahrens berechnen. Da die linke Seite dieser Gleichung

$$E(x)^{C_0} + E(x)^{C_1} + \ldots + E(x)^{C_{n-1}}$$

unter der Voraussetzung $C_k > 0$ eine monoton wachsende Funktion von $E(x)$ darstellt und für $E(x) = 0$ verschwindet, dagegen für $E(x) \to \infty$ über alle Grenzen wächst, da ferner stets $f(x,1) > 0$ für $x > 0$ gilt, hat die Gl. (23) genau e i n e reelle Wurzel $E(x)$.

Man hat also drei Werte für x anzunehmen, wobei zweckmäßigerweise $x_1 = 1$ gesetzt wird, und aus den beobachteten Werten der P_r $f(x,1)$ und $f'(x,1)$ zu bestimmen. Aus der Gl. (23) erhält man dann $E(x_1)$, $E(x_2)$, $E(x_3)$ und aus der Gl. (22) $\bar{a}(x_1)$, $\bar{a}(x_2)$, $\bar{a}(x_3)$. Die Gl. (19), (20) und (21) liefern die Parameter η_1, β und γ, mit deren Hilfe dann unter Benutzung von (7) und (7a) aus den Gl. (4) und (5) die theoretische Häufigkeitsverteilung ermittelt werden kann. Hierzu werden nur noch die Werte der C_k benötigt. Die Bestimmung könnte aus den beobachteten Mittelwerten $m^{(k)}$ der Teilabschnitte mit Hilfe der Gleichung

$$C_k = \frac{m^{(k)}}{m}$$

erfolgen. In dem besprochenen Beispiel hätte man also aus den 120 beobachteten Werten den Mittelwert m, aus den 10 beobachteten Januar-Werten $m^{(0)}$, aus den 10 Februar-Werten $m^{(1)}$ usw. zu bestimmen. In der Regel wird dieses Verfahren aber deswegen nicht anwendbar sein, weil die Zahl der Werte, aus denen $m^{(k)}$ bestimmt wird, zu gering ist. Deswegen erscheint es zweckmäßig, für den Verlauf der $m^{(k)}$ eine bestimmte Funktion anzunehmen und unter Benutzung dieser Funktion die $m^{(k)}$ festzulegen. Bei der Statistik von Krankheitsfällen, deren Zahl mit der Jahreszeit stark schwankt, empfiehlt es sich, einen sinusförmigen Verlauf der $m^{(k)}$ anzunehmen:

$$\left.\begin{aligned} m^{(k)} &= m + a\cos\frac{2\pi k}{n} + b\sin\frac{2\pi k}{n} \\ &= m + A\sin\left(\psi_0 + \frac{2\pi k}{n}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (24),$$

wobei die a und b bzw. A und ψ_0 aus den beobachteten Mittelwerten mittels der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen sind. Auch im Falle eines nicht periodischen Verlaufs, z. B. eines linearen oder parabolischen Trends, kann man die verallgemeinerte Poisson-sche Formel anwenden und die theoretische Verteilungskurve aus den Gl. (4) und (5) bestimmen. Man hat die Konstanten der Trendgleichung mittels der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen und dann die $h_i^{(k)}$ zu berechnen.

Anwendungen.

Für eine Reihe von Infektionskrankheiten ergibt sich ein deutlicher periodischer jahreszeitlicher Verlauf der Erkrankungs- bzw. Sterbefälle[6]). Es liegt daher nahe, als Beispiel für die Anwendung der oben hergeleiteten Formel die Häufigkeitsstatistik einer Infektionskrankheit zu benutzen. Es sollen die wöchentlichen Todesfälle durch Meningitis (epidemische Genickstarre) in der Gesamtheit der deutschen Großstädte in den 10 Jahren 1925 bis 1934[7]) untersucht werden. Um die Feststellung des periodischen Verlaufs zu erleichtern, werden jeweils die Todesfälle für 4 aufeinander folgende Wochen zusammengefaßt, so daß das Jahr in 13 4-Wochen-Abschnitte zerfällt. Der Mittelwert beträgt $m' =$ rd. 10,6 Todesfälle je 4-Wochen-Abschnitt.

Tafel 1. Der periodische Verlauf der Todesfälle durch Meningitis.

I.	II. k	III. Beobachteter Mittelwert f. d. k-ten 4-Wochen-Abschnitt	IV. Theoretischer Mittelwert f. d. k-ten 4-Wochen-Abschnitt
1.— 4. Woche	0	11,2	12,07
5.— 8. ,,	1	14,2	13,10
9.—12. ,,	2	17,4	13,55
13.—16. ,,	3	12,4	13,32
17.—20. ,,	4	10,1	12,46
21.—24. ,,	5	11,2	11,16
25.—28. ,,	6	9,3	9,73
29.—32. ,,	7	9,4	8,49
33.—36. ,,	8	8,1	7,72
37.—40. ,,	9	7,1	7,62
41.—44. ,,	10	9,8	8,18
45.—48. ,,	11	9,8	9,29
49.—52. ,,	12	7,4	10,70

[6]) Vgl. z. B. Ziezold: Weitere Ergebnisse der Analyse von Seuchenkurven. Z. Hyg. Infekt.-Krankh., Bd. 124 (1942), S. 93.

[7]) Reichsgesundheitsblatt, Jg. 1—10.

Spalte III der Tafel 1 zeigt die beobachteten Mittelwerte für die einzelnen 4-Wochen-Abschnitte; bereits aus diesen Zahlen ist der periodische Verlauf deutlich erkennbar. Zum Nachweis der Periodizität ist das sogenannte Periodogramm[8]) zu berechnen. Zu diesem Zwecke sind die folgenden Werte für $r = 3$, $r = 4$ usw. zu ermitteln:

$$\left.\begin{aligned} a_r &= \frac{2}{N}\sum_{\nu=0}^{r-1}(y'_\nu + y'_{\nu+r} + y'_{\nu+2r} + \dots)\cos\frac{2\pi}{r}\nu \\ b_r &= \frac{2}{N}\sum_{\nu=0}^{r-1}(y'_\nu + y'_{\nu+r} + y'_{\nu+2r} + \dots)\sin\frac{2\pi}{r}\nu \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

Dabei bedeuten $N = 130$ die Gesamtzahl der 4-Wochen-Abschnitte und die y'_ν die Abweichung der im ν-ten 4-Wochen-Abschnitt beobachteten Zahl der Todesfälle von dem (abgerundeten) Mittelwert 10,6. (Die 4-Wochen-Abschnitte sind laufend von 0 bis 129 numeriert. Aus den a_r und b_r erhält man die Amplitude für eine Periode von r Abschnitten

$$A_r = \sqrt{a_r^2 + b_r^2}.$$

Es ergibt sich das folgende Periodogramm:

r	A_r	r	A_r	r	A_r
3	0,38	8	0,29	13	*2,99*
4	0,30	9	1,37	14	1,18
5	0,40	10	0,50	15	1,32
6	0,33	11	0,94	16	1,67
7	0,99	12	1,09	17	0,42

Das Periodogramm zeigt ein deutliches Maximum für $r = 13$, d. h. die Periode 13 ist vorherrschend, womit die behauptete jahreszeitliche Periodizität erwiesen ist. Man erhält für $r = 13$ $a_{13} = 1{,}50$ und $b_{13} = 2{,}59$; die theoretischen Werte für den k-ten 4-Wochen-Abschnitt sind

$$y_k = m' + a_{13}\cos\frac{2\pi}{13}k + b_{13}\sin\frac{2\pi}{13}k.$$

Die Rechnung führt zu den in Spalte IV der Tafel 1 angegebenen Werten. Diese Zahlen zeigen einen ähnlichen Verlauf wie die beobachteten Zahlen, wenn auch die letzteren stärkere Schwankungen aufweisen. Eine bessere Anpassung würde man erhalten, wenn man auch die höheren Glieder der harmonischen Entwicklung berücksichtigen würde. Da aber nicht feststeht, ob diese Perioden noch reell sind, soll auf die höheren Glieder verzichtet werden.

Tafel 2. Die Häufigkeisverteilung der Todesfälle durch Meningitis.

I.	II.	III.	IV.	V.
Zahl der Todesfälle je Woche	Beobachtete Häufigkeit	Häufigkeit nach Poisson (ohne Berücksichtigung der Periodizität)	Häufigkeit nach der Formel von Pollaczek-Geiringer ohne Berücksichtigung der Periodizität	Häufigkeit nach der Formel von Pollaczek-Geiringer mit Berücksichtigung der Periodizität
0	54	37,0	52,3	54,0
1	114	97,8	112,3	111,2
2	120	129,3	124,2	121,9
3	92	113,9	96,0	95,5
4	61	75,2	59,8	61,0
5	32	39,7	33,1	34,5
6	25	17,5	17,7	18,3
7	10	6,6	9,7	9,7
8	5	2,2	5,5	5,3
9	2	0,6	3,3	3,1
10	2	0,2	2,1	1,9
11 u. mehr	3*)	0,0	4,0	3,6
Summe	520	520,0	520,0	520,0

[8]) Vgl. Stumpff: Grundlagen und Methoden der Periodenforschung. Berlin 1937.

*) Es wurden je einmal 11, 12 und 19 Todesfälle beobachtet.

Tafel 2 zeigt nun in Spalte II die beobachtete Häufigkeit (wöchentliche Zahlen), in Spalte III die Werte der Poissonschen Formel, die von den beobachteten Werten systematisch abweichen, und in Spalte IV die Werte der Formel von Pollaczek-Geiringer, die unter Benutzung von $\lg x_1 = 0$, $\lg x_2 = -0{,}02$ und $\lg x_3 = -0{,}04$ berechnet worden sind[9]) und mit der beobachteten Verteilung befriedigend übereinstimmen. Bei den Zahlen der Spalte V ist auch die Periodizität berücksichtigt worden; dabei wurden die a_r und b_r für $r = 52$ berechnet

$$a_{52} = 0{,}253, \quad b_{52} = 0{,}716$$

und hieraus die $m^{(k)}$ nach Gl. (24) bestimmt. Die Zahlen der Spalte V unterscheiden sich nicht wesentlich von den Zahlen der Spalte IV; die Anpassung an die beobachtete Verteilung ist eher noch etwas besser.

Bei der Anwendung der Formel von Pollaczek-Geiringer auf die Hagelstatistik könnten insofern Bedenken auftreten, als die Dinge hier nicht so einfach wie bei der Statistik der Unfälle oder der ansteckenden Krankheiten liegen. Wenn auch durch einen Hagelschlag ein mehr oder weniger großes Gebiet getroffen werden kann, so daß ähnliche Verhältnisse wie bei der Krankheitsstatistik vorliegen, so ist doch die Zahl der während eines Hageljahres getroffenen Gebiete zu groß, um daraus die Gültigkeit des Poissonschen Verteilungsschemas zu folgern. Auch die Abrundung auf volle Promille-Sätze und die Gleichstellung dieser Sätze mit der Ereigniszahl[10]) entspricht nicht den tatsächlichen Verhältnissen. Andererseits haben aber die durchgerechneten Beispiele gezeigt, daß die erweiterte Poissonsche Verteilungskurve zumindest eine gute Annäherung an die empirische Schadensverteilung ergibt, so daß diese Formel vorläufig eine brauchbare Methode für die Ermittlung der Schadensverteilungskurve liefert.

Als Beispiel soll die Statistik über die verhagelte Fläche in Württemberg in den 60 Jahren 1828 bis 1887 untersucht werden[11]).

Tafel 3. Die Häufigkeitsverteilung der Hagelschäden in Württemberg 1828—1887.

I. Verhagelte Fläche in ‰	II. Beobachtete Häufigkeit	III. Häufigkeit nach der Poissonschen Formel	IV. Häufigkeit nach de Formel von Pollaczek-Geiringer	V. Häufigkeit unter Berücksichtigung der Periodizität nach der Poissonschen Formel	VI. Formel von Pollaczek-Geiringer
0—2	5	0,3	4,8	0,8	4,9
3—5	15	5,8	13,4	8,4	13,2
6—8	14	19,4	14,0	18,0	13,9
9—11	6	21,3	10,7	17,4	10,7
12—14	10	10,2	7,1	10,3	7,1
15—17	4	2,6	4,3	3,9	4,3
18—20	2	0,4	2,5	1,0	2,4
21 u. mehr	4	0,0	3,2	0,2	3,5
Summe	60	60,0	60,0	60,0	60,0

Tafel 3 zeigt in Spalte I die verhagelte Fläche in ‰, in Spalte II die Zahl der Jahre, in denen die in Spalte I angegebenen Promillesätze beobachtet worden sind. Dabei sind die in den einzelnen Jahren festgestellten Schadenssätze auf volle Promille abgerundet worden. Mit diesen Zahlen wurde dann die Rechnung durchgeführt; nur der Übersichtlichkeit halber sind in der Tafel 3 jeweils die Promillesätze 0—2, 3—5 usw. zusammengefaßt worden. Der Mittelwert beträgt $m = 9{,}233$, d. h. im Durchschnitt der 60 Jahre verhagelten jährlich 9,233‰ der Gesamtfläche. Spalte III zeigt die nach der Poissonschen Formel berechneten Zahlen, die systematisch von den beobachteten Zahlen abweichen. Spalte IV zeigt die Werte nach der Formel von Pollaczek-Geiringer ohne Berücksichtigung der Periodizität, wobei $x_1 = 1$, $x_2 = 0{,}97724$, $x_3 = 0{,}95500$ gesetzt wurde. Die Übereinstimmung mit den beobachteten Werten ist befriedigend bis auf den Wert für 9—11‰.

---

9) Zur Berechnungsmethode vgl. Lüders: a. a. O.

10) Vgl. Lüders: Über die Verteilung der Schadenquotienten bei Hagelversicherungsunternehmungen. Neumanns Zeitschrift, Bd. 57 (1934), S. 761.

11) Bühler: Die Hagelbeschädigungen in Württemberg während der 60 Jahre 1828—1887. Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde, Jg. 1888, I. Bd., 3. Heft.

Zur Feststellung, ob ein periodischer Schadensverlauf vorliegt, ist das Periodogramm zu berechnen. Man erhält nach der geschilderten Methode die folgenden Werte:

r	A_r	r	A_r
3	1,26	12	0,60
4	0,43	13	1,47
5	1,80	14	1,37
6	0,46	15	1,04
7	2,08	16	0,99
8	0,92	17	1,02
9	2,74	18	1,02
10	*2,86*	19	1,08
11	1,70	20	0,80

Es ergibt sich ein deutliches Maximum für $r = 10$, d. h. die Schäden zeigen eine angenähert 10-jährige Periodizität. Man erhält $a_{10} = -2{,}52$ und $b_{10} = 1{,}36$.

Wie die Spalte V der Tafel 3 zeigt, ergibt die Poissonsche Formel auch dann noch keine befriedigende Annäherung an die beobachtete Häufigkeitsverteilung, wenn man die Periodizität berücksichtigt. Nach der Formel von Pollaczek-Geiringer (Spalte VI) erhält man fast dieselben mit der Beobachtung bis auf den Wert für 9—11‰ befriedigend übereinstimmenden Zahlen wie in Spalte IV.

Bei dem behandelten Beispiel fällt auf, daß die nach der „unperiodischen" Formel berechneten Werte nur wenig von den Werten der „periodischen" Formel abweichen. Der Grund für diese Erscheinung ist darin zu suchen, daß die P_r der „periodischen" Verteilung als Summe von k Gliedern dargestellt werden, die nach der Gl. (4) berechnet sind, wobei man die Parameter aus den η_1, η_2, ... durch Multiplikation mit C_k erhält. Diese Summe ergibt nun bei nicht zu großer Amplitude angenähert denselben Wert wie die Anwendung der Formel (2) ohne Berücksichtigung der Periodizität. Die Annäherung wird noch dadurch verbessert, daß die Parameter der Formel aus den modifizierten Mittelwerten der empirischen Verteilung berechnet werden.

Wie die Untersuchung von weiterem Material der Hagelschadenstatistik, insbesondere der Schadensergebnisse einzelner Versicherungsgesellschaften, zeigt, wird fast immer ein periodischer Schadensverlauf mit einer Periode von etwa 10 bis 11 Jahren beobachtet. In vielen Fällen fallen die Jahre mit den größten Schäden mit den Jahren, in denen ein Maximum der Sonnenflecken-Relativzahlen beobachtet wurde, zusammen oder liegen jedenfalls in deren Nähe.

Bei der Berechnung der Rücklage für den schwankenden Jahresbedarf nach der mathematischen Methode wird es sich, wenn der periodische Schadensverlauf für die betreffende Anstalt nachgewiesen ist, empfehlen, diese Periodizität zu berücksichtigen. Die Rücklage wäre dann in eine Rücklage I und eine Rücklage II aufzuspalten. Die Rücklage I berücksichtigt die Schäden, die sich aus dem periodischen Schadensverlauf ergeben; sie wird aus den ersparten Nettoprämien während der Minimum-Jahre gebildet und in den Maximum-Jahren wieder aufgelöst. Die Rücklage II wird für diejenigen Überschäden gebildet, die sich durch zufällige Schwankungen ergeben können. Diese Rücklage ist in der Regel erheblich höher und läßt sich mit Hilfe der Formel von Pollaczek-Geiringer berechnen[12]). Da die $P_r^{(k)}$ sich wegen Gl. (4) von Jahr zu Jahr periodisch ändern, würde sich bei genauer Rechnung auch für die Rücklage II ein mehr oder weniger hoher Bedarf ergeben, je nachdem ob es sich um ein Maximum- oder Minimum-Jahr handelt. Es muß je nach den besonderen Verhältnissen entschieden werden, ob auch diese Schwankungen bei der Ermittelung des Rücklagenbedarfs berücksichtigt werden sollen.

Die Berechnung der Schadensverteilungskurve für eine einzelne Versicherungsanstalt ist nicht immer so einfach durchzuführen wie bei dem untersuchten württembergischen Material. Soweit nämlich überhaupt ein längerer Beobachtungszeitraum zur Verfügung steht, ist der Versicherungsbestand häufig nicht homogen geblieben. In einigen Fällen hat sich der Bestand z. B. stark vergrößert, so daß die älteren Schadenszahlen nur bedingt verwertbar sind. In vielen Fällen wird aber die Bearbeitung des Materials nach der beschriebenen Methode möglich sein und damit die Beantwortung der Frage, wie hoch eine Rücklage sein muß, damit noch Schäden gedeckt werden können, die mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu erwarten sind.

---

12) Vgl. Lüders: Neumanns Zeitschrift, Bd. 57 (1934), S. 761 ff.

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur Bestimmung der mittleren Abscisse.

Bei der zeichnerischen Bestimmung der mittleren Abscisse eines Kurvenabschnittes pflegt man so vorzugehen, daß man zur Sehne des Bogens an ihn eine parallele Tangente zeichnet, durch den Halbierungspunkt der Sehne eine x-Parallele legt und das Stück zwischen Sehne und Tangente in drei gleiche Teile teilt. Der der Tangente zuliegende Teilpunkt gibt annähernd die mittlere Abscisse. Verfährt man genau so mit dem y-parallelen Stück zwischen Sehnenmitte und Tangente, erhält man einen Näherungswert für die mittlere Ordinate. Wie man leicht sieht, schließen die so bestimmten Stücke der beiden Ersatzstufenkurven in dem betreffenden Abschnitt mit der x-Achse flächengleiche Stücke ein.

Durch diese Konstruktion wird allgemein nicht mehr der durch Parabeln dritten Grades bestimmte Flächeninhalt exakt wieder gegeben, wie durch eine Konstruktion nach der Keplerschen Faßregel [1]). Der Fehler obiger Konstruktion berechnet sich folgendermaßen, wenn man etwa von der Konstruktion der mittleren Ordinate ausgeht. Man legt die Ordinatenachse in die Mitte des Intervalles und bezeichnet seine Grenzen mit $+h$ und $-h$; dann hat man zur Bestimmung der Abscisse δ des Berührungspunktes der zur Sehne parallelen Tangente

$$\frac{f(+h)-f(-h)}{2h}=f'(\delta)$$

oder, wenn man beiderseits um $x=0$ entwickelt und mit den ersten Gliedern abbricht,

$$f_0'+\frac{f_0'''}{6}h^2+\ldots=f_0'+f_0''\,\delta+\ldots$$

Also ist

$$\delta\approx\frac{f_0'''}{6f_0''}h^2 .$$

Die Gleichung der Tangente in dem Punkt mit der Abscisse δ lautet

$$y-f(\delta)=f'(\delta)(x-\delta) .$$

Also wird die Ordinate der Tangente für $x=0$, wenn man sich auf die erste Näherung beschränkt,

$$y_0=f(\delta)-\delta f'(\delta)\approx f_0-\frac{1}{2}f_0''\,\delta^2$$

$$=f_0-\frac{f_0'''^2}{72f_0''}h^4 .$$

Damit ergibt sich für den Näherungswert

$$\frac{h}{3}(y_{-h}+4y_0+y_{+h})$$

$$=2f_0h+\frac{1}{3}f_0''h^3+\left[\frac{f_0^{(IV)}}{36}-\frac{f_0'''^2}{54f_0''}\right]h^5+\ldots,$$

während der exakte Wert

$$\int_{-h}^{+h}f(x)\,dx=2f_0h+\frac{1}{3}f_0''h^3+\frac{f_0^{(IV)}}{60}h^5+\ldots.$$

ist. Das erste Fehlerglied ist somit:

$$\Delta=\left(\frac{f_0^{(IV)}}{90}-\frac{f_0'''^2}{54f_0''}\right)h^5+\ldots.$$

Der Fehler ist auch hier von fünfter Ordnung in h. Aber da f''' im Restglied vorkommt, wird eine Parabel dritten Grades hier nicht mehr, wie bei der Konstruktion nach der Keplerschen Faßregel, exakt integriert. Den Fehler der Konstruktion nach dieser Regel schätzt das erste Klammerglied ab [1]). Das zweite gibt den durch die angegebene Konstruktion hinzugekommenen Fehler an. Dieser wird dann klein, wenn f_0'' groß gegen $f_0'''^2$ ist, d. h. wenn der Bogen nicht allzusehr von einem gewöhnlichen Parabelbogen abweicht. Keinesfalls ist also die Konstruktion erlaubt, wenn die Kurve im Intervall einen Wendepunkt hat. Haben f^{IV} und f'' das gleiche Zeichen, und ist absolut genommen das zweite Glied nicht größer als das erste, so wird der Fehler kleiner als bei der Keplerschen Faßregel. Genaue Werte liefert diese Konstruktion immer dann, wenn es sich um den Bogen einer Parabel handelt, auch wenn ihre Achse der y-Achse nicht parallel ist, also z. B. für Kurven, deren Gleichung $y=Ax+B\sqrt{x}+C$ lautet.

Dresden Fr. A. Willers.

[1]) Fr. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis. Berlin 1928, § 15 (22).

Die Querschwingungen der Schraubenfeder.

1. Bezugnahme auf das Schrifttum. Die Arbeit J. Dick, The transverse vibrations of a helical spring with pinned ends and no axial load, Philos. Mag., J. Sci., London, 7, 33 (1942), 513—519 soll berichtigt werden.

2. Aufstellung der Differentialgleichung für die Querverschiebung.

x Bogenlänge der Schraubenachse,

m auf die Längeneinheit der Schraubenachse bezogene Masse,

w Querverschiebung.

Die Bewegungsgleichung: Kraft = Masse mal Beschleunigung ergibt

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

D = Durchmesser der Schraubenlinie.

Das auf die Längeneinheit der Schraubenachse bezogene Massenträgheitsmoment ist nach Dick, S. 514, Gl. (1) $m\frac{D^2}{8}$. Die Bewegungsgleichung: Kraftmoment = Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung ergibt

$$Q+\frac{\partial M}{\partial x}=m\frac{D^2}{8}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2}.$$

ν = Verhältnis der Querkürzung zur Längsdehnung,
F = Längssteifigkeit,
l = Länge der Schraubenachse.

Die Schersteifigkeit ist nach Dick, S. 514: $2(1+\nu)Fl$.
w_1 durch die Querkraft verursachte Querverschiebung

$$Q=2(1+\nu)Fl\frac{\partial w_1}{\partial x}\quad\ldots\ldots\ (1).$$

Die Biegungssteifigkeit ist nach Dick, S. 514

$$\frac{1+\nu}{2+\nu}Fl\frac{D^2}{2}.$$

w_2 durch das Biegungsmoment verursachte Querverschiebung

$$M=\frac{1+\nu}{2+\nu}Fl\frac{D^2}{2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\quad\ldots\ldots\ (2).$$

Die ganze Querverschiebung ist $w=w_1+w_2$. Dick setzt in der Bewegungsgleichung Kraftmoment = Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung statt der ganzen Querverschiebung nur die durch das Biegungsmoment verursachte Querverschiebung ein, obgleich er in der Bewegungsgleichung Kraft = Masse mal Beschleunigung die ganze Querverschiebung einsetzt. In den Gleichungen, die die Querkraft und das Biegungsmoment durch Differentialoperatoren der Teilverschiebungen ausdrücken, werden die Teilverschiebungen eliminiert

$$\frac{1}{2(1+\nu)Fl}\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{2+\nu}{1+\nu}\frac{2}{FlD^2}M=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

In den Bewegungsgleichungen und der letzten Gleichung wird die Querkraft eliminiert

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=m\frac{D^2}{8}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}$$

$$\frac{m}{2(1+\nu)Fl}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{2+\nu}{1+\nu}\frac{2}{FlD^2}M=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\quad (3).$$

In den letzten beiden Gleichungen wird das Biegungsmoment eliminiert

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{4+\nu}{1+\nu}\frac{m}{4Fl}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+2\frac{2+\nu}{1+\nu}\frac{m}{FlD^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.$$

3. **Integration der Differentialgleichung für die Querverschiebung.** Der Bernoullische Produktansatz $w=A(x)\sin(\omega t+\alpha)$ ergibt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^4A}{dx^4}+\frac{4+\nu}{1+\nu}\frac{m}{4Fl}\omega^2\frac{d^2A}{dx^2}-2\frac{2+\nu}{1+\nu}\frac{m}{FlD^2}\omega^2 A=0.$$

Ihr allgemeines Integral ist

$$A=K_1\operatorname{Sin}\lambda_1 x+K_2\operatorname{Cos}\lambda_1 x+K_3\sin\lambda_2 x+K_4\cos\lambda_2 x,$$

worin

$$\lambda_{\frac{1}{2}}^2=\mp\frac{4+\nu}{1+\nu}\frac{m}{8Fl}\omega^2+\sqrt{\left(\frac{4+\nu}{1+\nu}\frac{m}{8Fl}\right)^2\omega^4+2\frac{2+\nu}{1+\nu}\frac{m}{FlD^2}\omega^2}.$$

4. **Erfüllung der Randbedingungen.** Sind die Enden gelenkig gelagert, so ist dort $w=0$ und $M=0$. Nach Gl. (3) wird die Randbedingung $M=0$ mit Hilfe der Randbedingung $w=0$ zu $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$ vereinfacht. Die Enden der Schraubenachse werden als Punkte $x=0$ und $x=l$ gewählt. Die Bedingungen am Rande $x=0$ ergeben

$$K_2=0\qquad K_4=0;$$

die Bedingungen am Rande $x=l$ ergeben

$$K_1=0\qquad \lambda_2 l=n\pi\qquad n=1,2,3,\ldots.$$

5. **Ergebnis.** Für die Eigenfrequenzen gilt

$$\omega^2=4(1+\nu)\frac{n^4\pi^4}{(4+\nu)n^2\pi^2+8(2+\nu)\frac{l^2}{D^2}}\frac{F}{ml}.$$

Die ganze Querverschiebung ist

$$w=K_3\sin\frac{n\pi x}{l}\sin(\omega t+\alpha).$$

Nach Gl. (3) ist das Biegungsmoment

$$M=-\frac{1+\nu}{2}\frac{n^4\pi^4+8\frac{l^2}{D^2}n^2\pi^2}{(4+\nu)n^2\pi^2+8(2+\nu)\frac{l^2}{D^2}}\frac{FD^2}{l}w.$$

Nach der Bewegungsgleichung: Kraftmoment = Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung ist die Querkraft

$$Q=4(1+\nu)\frac{n^3\pi^3}{(4+\nu)n^2\pi^2+8(2+\nu)\frac{l^2}{D^2}}FK^3.\cos\frac{n\pi x}{l}\sin(\omega t+\alpha).$$

Aus Gl. (1) folgt die durch die Querkraft verursachte Querverschiebung

$$w_1=\frac{2n^2\pi^2}{(4+\nu)n^2\pi^2+(2+\nu)\frac{l^2}{D^2}}w+f_1(t).$$

Aus Gl. (2) folgt die durch das Biegungsmoment verursachte Querverschiebung

$$w_2=(2+\nu)\frac{n^2\pi^2+8\frac{l^2}{D^2}}{(4+\nu)n^2\pi^2+8(2+\nu)\frac{l^2}{D^2}}w+xf_2(t)+f_3(t).$$

Da die Summe der Teilverschiebungen die ganze Querverschiebung ergeben muß, folgt $f_2=0$ $f_3=-f_1$. Demnach ist die durch das Biegungsmoment verursachte Querverschiebung

$$w_2=(2+\nu)\frac{n^2\pi^2+8\frac{l^2}{D^2}}{(4+\nu)n^2\pi^2+8(2+\nu)\frac{l^2}{D^2}}w-f_1(t).$$

Soll nicht nur die ganze Querverschiebung, sondern sollen auch die Teilverschiebungen an den Enden $=0$ sein, so folgt $f_1=0$. Kann $(4+\nu)\,n^2\pi^2$ gegen $8(2+\nu)\frac{l^2}{D^2}$ vernachlässigt werden, also bei den niederen Frequenzen langer dünner Federn, ist

$$\omega=n^2\pi^2 D\sqrt{\frac{1+\nu}{2(2+\nu)}\frac{F}{ml^3}};$$

$$M=-n^2\pi^2\frac{1+\nu}{2(2+\nu)}\frac{FD^2}{l}w;$$

$$Q=n^3\pi^3\frac{1+\nu}{2(2+\nu)}\frac{FD^2}{l^2}K_3\cos\frac{n\pi x}{l}\sin(\omega t+\alpha);$$

die durch die Querkraft verursachte Querverschiebung kann vernachlässigt werden. Kann $8\frac{l^2}{D^2}$ gegen $n^2\pi^2$ vernachlässigt werden, also bei den höheren Frequenzen kurzer dicker Federn, so ist

$$\omega=n\pi\sqrt{\frac{4(1+\nu)}{4+\nu}\frac{F}{ml}};\quad M=-\frac{1+\nu}{2(4+\nu)}n^2\pi^2\frac{FD^2}{l}w;$$

$$Q=\frac{4(1+\nu)}{4+\nu}n\pi FK_3\cos\frac{n\pi x}{l}\sin(\omega t+\alpha)$$

$$w_1=\frac{2}{4+\nu}w;\qquad w_2=\frac{2+\nu}{4+\nu}w;$$

die durch die Querkraft verursachte Querverschiebung ist nur wenig kleiner als die durch das Biegungsmoment verursachte Querverschiebung.

6. **Vernachlässigung des Summanden Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung.** Für die Querverschiebung gilt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{m}{2(1+\nu)Fl}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+2\frac{2+\nu}{1+\nu}\frac{m}{FlD^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.$$

Für die Eigenfrequenzen gilt

$$\omega^2=2(1+\nu)\frac{n^4\pi^4}{n^2\pi^2+4(2+\nu)\frac{l^2}{D^2}}\frac{F}{ml};$$

$$M=-\frac{2n^2\pi^2(1+\nu)}{n^2\pi^2+4(2+\nu)\frac{l^2}{D^2}}Flw;$$

$$Q=-\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{2n^3\pi^3(1+\nu)}{n^2\pi^2+4(2+\nu)\frac{l^2}{D^2}}FK_3\cos\frac{n\pi x}{l}\sin(\omega t+\alpha);$$

$$w_1=\frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2+4(2+\nu)\frac{l^2}{D^2}}w;$$

$$w_2=\frac{4(2+\nu)\frac{l^2}{D^2}}{n^2\pi^2+4(2+\nu)\frac{l^2}{D^2}}w.$$

Kann $4(2+\nu)\frac{l^2}{D^2}$ gegen $n^2\pi^2$ vernachlässigt werden, so ist

$$\omega=n\pi\sqrt{2(1+\nu)\frac{F}{ml}};\qquad M=-2(1+\nu)Flw;$$

$$Q=2n\pi(1+\nu)FK_3\cos\frac{n\pi x}{l}\sin(\omega t+\alpha);$$

die durch das Biegungsmoment verursachte Querverschiebung kann vernachlässigt werden.

7. **Vernachlässigung der durch die Querkraft verursachten Querverschiebung.** Für die Querverschiebung gilt die Differentialgleichung

$$\frac{1+\nu}{2+\nu}Fl\frac{D^2}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-m\frac{D^2}{8}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.$$

Für die Eigenfrequenzen gilt

$$\omega^2=4\frac{1+\nu}{2+\nu}\frac{n^4\pi^4}{n^2\pi^2+8\frac{l^2}{D^2}}\frac{F}{ml}.$$

Nach Gl. (2) ist das Biegungsmoment,

$$M = \frac{1+\nu}{2+\nu} F l \frac{D^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -n^2\pi^2 \frac{1+\nu}{2+\nu} \frac{F D^2}{2 l} w .$$

$$Q = 4 \frac{1+\nu}{2+\nu} \frac{n^3\pi^3}{n^2\pi^2 + 8\frac{l^2}{D^2}} F K_3 \cos\frac{n\pi x}{l} \sin(\omega t + a) .$$

Kann $8\frac{l^2}{D^2}$ gegen $n^2\pi^2$ vernachlässigt werden, so ist

$$\omega = 2 n \pi \sqrt{\frac{1+\nu}{2+\nu} \cdot \frac{F}{m l}};$$

$$Q = 4 n \pi \frac{1+\nu}{2+\nu} F K_3 \cos\frac{n\pi x}{l} \sin(\omega t + a) .$$

8. Vernachlässigung des Summanden Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung und der durch die Querkraft verursachten Querverschiebung. Für die Querverschiebung gilt die Differentialgleichung

$$\frac{1+\nu}{2+\nu} F l \frac{D^2}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 .$$

Die Eigenfrequenzen sind

$$\omega = n^2\pi^2 D \sqrt{\frac{1+\nu}{2+\nu} \frac{F}{2 m l^3}} .$$

$$M = -n^2\pi^2 \frac{1+\nu}{2+\nu} \cdot \frac{F D^2}{2 l} w;$$

$$Q = n^3\pi^3 \frac{1+\nu}{2+\nu} \frac{F D^2}{2 l^2} K_3 \cos\frac{n\pi x}{l} \sin(\omega t + a) .$$

Hannover. Konrad Ludwig.

Eine Beziehung zwischen der nichtlinearen Elastizitätstheorie und der Verfestigungstheorie von Roš-Eichinger-Schmidt.

M. Roš und A. Eichinger [1][1]) haben im Jahre 1926 durch Versuche nachgewiesen, daß im Verfestigungsgebiet eine funktionale Beziehung zwischen der Intensität des Spannungsdeviators und der Intensität des Deformationsdeviators folgender Art

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{(\sigma_1-\sigma_m)^2+(\sigma_2-\sigma_m)^2+(\sigma_3-\sigma_m)^2}\\&= f\left(\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_m)^2}\right)\end{aligned}\right\} \quad . . (1)$$

existiert, die vom Beanspruchungsweg unabhängig ist und nur vom Material selbst abhängt. Dieser Tatbestand, der von R. Schmidt [2] durch weitere Versuche bestätigt wurde, hat zwar zu einigen Arbeiten Anlaß gegeben [3], jedoch ist bis jetzt nicht bemerkt worden, daß man daraus ein bemerkenswertes Ergebnis ableiten kann, nämlich, daß zwischen der Verfestigungstheorie, die auf Gl. (1) gestützt ist, und der nichtlinearen Elastizitätstheorie kein Unterschied vorhanden ist. Dieses Ergebnis wollen wir hier ableiten. Wir beabsichtigen, in einer späteren Arbeit Anwendungen zu geben.

Wir machen folgende Annahmen:

1. Der Körper bleibt während der Beanspruchung isotrop. Daraus folgt, daß die Hauptdehnungsrichtungen dauernd mit den Hauptspannungsrichtungen zusammenfallen.

2. Die Figur der drei Mohrschen Hauptdehnungskreise in der ε—γ-Ebene ist stets ähnlich zur Figur der drei Mohrschen Hauptspannungskreise in der σ—τ-Ebene. Dies kann man so ausdrücken

$$\frac{\tau_1}{\gamma_1} = \frac{\tau_2}{\gamma_2} = \frac{\tau_3}{\gamma_3} \quad . . . . (2).$$

Vorteilhafter für uns ist es, statt Gl. (2)

$$\frac{\sigma_1-\sigma_m}{\varepsilon_1-\varepsilon_m} = \frac{\sigma_2-\sigma_m}{\varepsilon_2-\varepsilon_m} = \frac{\sigma_3-\sigma_m}{\varepsilon_3-\varepsilon_m} \quad . . . . (3)$$

zu schreiben. Die zwei Formen (2) und (3) sind miteinander identisch, und gerade das Ersetzen von Gl. (2) durch Gl. (3) bildet einen wichtigen Schritt für unsere Ableitung.

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Die klassische Elastizitätstheorie werden wir in der Weise gewinnen, daß wir außer diesen zwei Annahmen noch folgendes voraussetzen.

3. Es ist immer

$$\frac{\sigma_1-\sigma_m}{\varepsilon_1-\varepsilon_m} = \frac{\sigma_2-\sigma_m}{\varepsilon_2-\varepsilon_m} = \frac{\sigma_3-\sigma_m}{\varepsilon_3-\varepsilon_m} = 2\cdot G = \text{konst.} \quad . . (4).$$

4. Es ist immer

$$\frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} = 3k = \text{konst.} \quad . . . . (5).$$

Diese zwei Stoffkonstanten G und k sind der Schubmodul und der Kompressionsmodul.

Aus (4) folgt nun

$$\sigma_1 - \sigma_m = 2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)$$

und mit Hilfe von (5) bekommen wir

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= 2G(\varepsilon_1-\varepsilon_m)+\sigma_m = 2G\left[\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_m}{2G}(3k-2G)\right]\\ \sigma_2 &= 2G\left[\varepsilon_2+\frac{\varepsilon_m}{2G}(3k-2G)\right]\\ \sigma_3 &= 2G\left[\varepsilon_3+\frac{\varepsilon_m}{2G}(3k-2G)\right]\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Diese Gl. (6) sind jene der klassischen Elastizitätstheorie. Die natürlichste nichtlineare Elastizitätstheorie wird man daraus gewinnen, daß man die Konstanten G und k durch Funktionen ersetzt. Man wird also

$$\sigma_i - \sigma_m = f_i(\varepsilon_i - \varepsilon_m) \qquad (i = 1, 2, 3) \quad . . . . . (7)$$

und

$$\sigma_m = \varphi(\varepsilon_m) \quad . . . . (8)$$

voraussetzen, wobei f_i und φ vier Funktionen sind, die nur vom Material abhängen. Die Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie werden also folgende sein:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= f_1(\varepsilon_1-\varepsilon_m)+\varphi(\varepsilon_m)\\ \sigma_2 &= f_2(\varepsilon_2-\varepsilon_m)+\varphi(\varepsilon_m)\\ \sigma_3 &= f_3(\varepsilon_3-\varepsilon_m)+\varphi(\varepsilon_m)\end{aligned}\right\} \quad . . . . (9)$$

Wir bemerken nun, daß aus Gl. (3) folgendes folgt:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sigma_1-\sigma_m}{\varepsilon_1-\varepsilon_m} = \frac{\sigma_2-\sigma_m}{\varepsilon_2-\varepsilon_m} = \frac{\sigma_3-\sigma_m}{\varepsilon_3-\varepsilon_m}\\ &= \frac{\sqrt{(\sigma_1-\sigma_m)^2+(\sigma_2-\sigma_m^2)+(\sigma_3-\sigma_m)^2}}{\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_m)^2}}\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die nichtlinearen Elastizitätstheorien können wir also auch so gewinnen, daß wir anstatt

$$(\sigma_i - \sigma_m) = f_i(\varepsilon_i - \varepsilon_m) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

zu schreiben, lieber

$$\sqrt{(\sigma_1-\sigma_m)^2+(\sigma_2-\sigma_m)^2+(\sigma_3-\sigma_m)^2} = F\left(\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_m)^2}\right)$$

schreiben, was freilich genau dasselbe ist.

Der Vergleich mit (1) zeigt uns, daß gerade der Umstand, daß im Verfestigungsgebiet die zwei Größen

$$\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_m)^2}$$

und

$$\sqrt{(\sigma_1-\sigma_m)^2+(\sigma_2-\sigma_m)^2+(\sigma_3-\sigma_m)^2}$$

und keine anderen miteinander in funktionaler Abhängigkeit stehen, uns zum logischen Schluß bringt, daß zwischen der nichtlinearen Elastizitätstheorie und der Verfestigungstheorie, die auf (1) aufgebaut wird, kein Unterschied existiert.

Damit ist unsere Behauptung schon bewiesen. Darüber hinaus bemerken wir, daß die Gl. (9) oder auch die damit gleichbedeutenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{F\left[\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_m)^2}\right]}{\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_m)^2}} \\
&\qquad (\varepsilon_1-\varepsilon_m)+\varphi(\varepsilon_m) \\
\sigma_2 &= \frac{F\left[\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_m)^2}\right]}{\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_m)^2}} \\
&\qquad (\varepsilon_2-\varepsilon_m)+\varphi(\varepsilon_m) \\
\sigma_3 &= \frac{F\left[\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_m)^2}\right]}{\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_m)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_m)^2}} \\
&\qquad (\varepsilon_3-\varepsilon_m)+\varphi(\varepsilon_m)
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

sowohl die Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie wie auch jene der Verfestigungstheorie von Roš-Eichinger-Schmidt sind. Zu bemerken ist aber noch, daß in der hier gegebenen Form diese Verfestigungstheorie viel weittragender dargestellt ist, als dies bis jetzt der Fall war, da wir jetzt auch eine eventuelle Volumenänderung berücksichtigen können, während bis heute immer vorausgesetzt war, daß die Volumenänderung gleich Null ist.

Schrifttum.

[1] M. Roš und A. Eichinger: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. Eidg. Materialprüfungsanstalt. Zürich 1926 und 1929.

[2] R. Schmidt: Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet. Ing.-Arch. Bd. 3 (1932), S. 215 bis 235.

[3] R. Moufang: Das plastische Verhalten von dünnwandigen Rohren unter statischem Innendruck. Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 24.

München[2]). A. Philippidis.

[2]) Lehrstuhl für technische Mechanik, Technische Hochschule München. Herrn Prof. Dr. L. Föppl und der Förderergemeinschaft der Deutschen Industrie möchte ich hier herzlichst danken für die Unterstützung, die sie mir bei meiner Arbeit gewährt haben.

NACHRICHTEN

Tagung in St. Louis.

In der Zeit vom 23. bis zum 25. Oktober fand in St. Louis eine Tagung statt, auf der Probleme der Strömungsforschung behandelt wurden. Es wurden dort die folgenden Vorträge gehalten:

SCHARDIN (Weil a. Rh.) — Bedeutung der Gasdynamik für die Ballistik.
SAUER (Weil a. Rh.) — Methoden für die praktische Berechnung von Überschallströmungen.
Dr. HEINZ (Lörrach/Baden) — Fehlerbetrachtungen zum Charakteristikenverfahren.
SCHUBERT (früher Peenemünde) — Theoretische und experimentelle Untersuchungen am axial angeströmten Kreiskegel.
SAUER (Weil a. Rh.) — Die Berechnung der Strömung um einen schief angeblasenen Kreiskegel (Diskussionsbeitrag).
BETZ (Göttingen) — Über den abgelösten Verdichtungsstoß.
WALZ (Göttingen) — Über die Grenzschicht bei hohen Machschen Zahlen.
MANGLER (Göttingen) — Kompressible Grenzschichten bei drehsymmetrischer und bei ebener Strömung.
WENDT (Braunschweig) — Die kompressible laminare Grenzschicht an der Platte und am Kreiskegel.
KETTEL — Turbulenzmessungen mit Hilfe der Ionensonde.
KRAUS — Oberflächentemperatur an schnellfliegenden Körpern.
REUTTER (Karlsruhe) — Ebene Potentialströmung in der Umgebung der Schallgeschwindigkeit.
HAACK (Bad Gandersheim) — Theoretische und experimentelle Untersuchungen der Stabilität.
ATHEN (Elmshorn) — Über einige Fragen des Gesamtwiderstandes von Rotationskörpern in Zusammenhang mit dem Optimumproblem.
KOHLER (Greifswald) — Die gaskinetische Theorie des Verdichtungsstoßes.

In den Jahren 1945 und 1946 starben von den Mitarbeitern der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik:

Prof. Dr. R. Baldus, München.
Prof. Dr. W. Cauer, Berlin.
Prof. Dr. H. Föttinger, Berlin.
Prof. Dr. R. Fuchs, Berlin.
Prof. Dr. J. Horn, Darmstadt.
Prof. Dr. W. v. Koppenfels, Brünn.
Prof. Dr. G. Kutta, Stuttgart.
Prof. Dr. M. Lagally, Dresden.
Prof. Dr. W. Ludwig, Dresden.
Prof. Dr. O. Mader, München.
Prof. Dr. L. v. Schrutka, Wien.
Prof. Dr. Th. Vahlen, Berlin.

Ehre ihrem Andenken!

Verantwortlich für den Inhalt: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden; für den Verlag: H. Kaesser, Berlin. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin N 4, Chausseestr. 106, Fernsprecher: 42 50 01 (Verlag App. 274, Vertrieb App. 275), Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/25—27/1. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: Vierteljährlich RM 15.— zuzüglich Bestellgeld, Einzelheft RM 6.—. Verantwortlich für den Anzeigenteil: Curt F. W. Schreiber, Berlin. Druck: Julius Beltz, Langensalza. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 245 der Sowjetischen Militär-Verwaltung in Deutschland.